第8章　回転に関わる力：力のモーメントとベクトル積　その1

8.1　はじめに：回転運動に関係する物理量

- （参考）並進運動
  - 運動方程式 $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$
  - 物体に力 $\boldsymbol{F}$ を加える → 力の方向に加速度 $\boldsymbol{a}$ が発生，力によって速度 $\boldsymbol{v}$ が変化
  - 力 $\boldsymbol{F}$ と加速度 $\boldsymbol{a}$ は比例，質量 m と加速度 $\boldsymbol{a}$ の大きさは反比例
- 回転運動
  - どのような力を加えると，回転するのか？
    → 力の方向が重要，また，回転軸から力点までの距離も重要
    → 力のモーメント（トルク）
  - 質量のような，回転運動を「変化させにくくする」物理量は？
    → 慣性モーメント（次回第 10 回の講義内容）
  - 回転の運動方程式はどんな形か？何が時間変化するのか？（次回第 10 回の講義内容）
- 力のモーメントなど，回転に関係する物理量を表すには**ベクトル積（外積）**が便利
- ベクトル積は，2 つのベクトルから第 3 のベクトルを作る演算，内積とは全く違う量

8.2　回転を引き起こす要因

8.2.1　棒の回転

どのような物理量が回転に関係するかを見るために，図 8.1 のような棒の回転を考える．図のように，棒の端点に力 $\boldsymbol{F}$ を加え，軸 O を中心に回転させることを考える．軸 O から点 A まで延びたベクトル（A の位置ベクトル）を $\boldsymbol{r}$ とおく．

力 $\boldsymbol{F}$ は棒に平行でも垂直でもない，任意の方向を向いているが，この力のうち，棒を回転させることに役立つのは棒に垂直な成分のみである．力 $\boldsymbol{F}$ と，棒に沿う位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ とのなす角を θ とすると，

$$(\text{棒に垂直な力の大きさ}) = (\text{回転に役立つ力の大きさ}) = |\boldsymbol{F}|\sin\theta \tag{8.2.1}$$

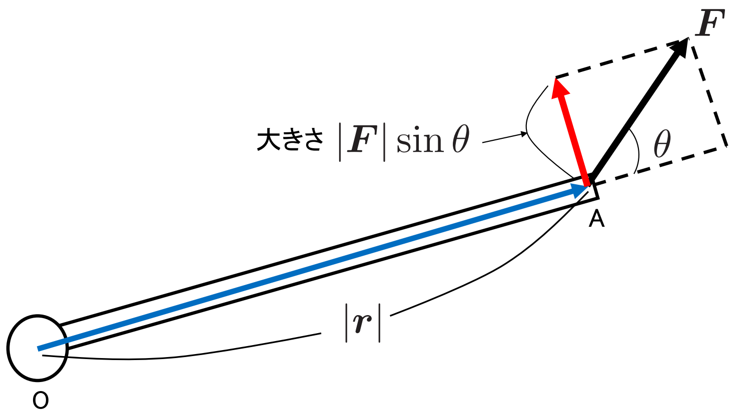

図 8.1: 物体を回転させるのに関わる物理量は，回転軸から力点までの距離 $|\boldsymbol{r}|$ と，$\boldsymbol{r}$ に垂直な力 $|\boldsymbol{F}|\sin\theta$ である．

である．

ではこの力があれば棒は回転するかというとそうではない．当たり前だが，軸の真上を引っぱっても回転するはずがない．同じ力で引くなら，なるべく軸から遠いところに力を加えた方が簡単に回転させることができる．つまり，力点（力を加えている点）は軸から遠いほど，簡単に回転を引き起こすことができる．すでに回転しているものを止めるときも同様で，なるべく軸から遠いところに力を掛けた方が止めやすい．これは「てこの原理」である．

これらをまとめると，

> **物体をよりたやすく回転させるには，軸と力点を結んだ線に垂直な力を，なるべく軸から遠いところに加える**

となる．軸から力点までの距離は $|\boldsymbol{r}|$ なので，これを数式で表せば

$$|\boldsymbol{F}|\sin\theta \times |\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}||\boldsymbol{F}|\sin\theta \tag{8.2.2}$$

という大きさの物理量が，回転の様子を決めるといえる．この物理量を**力のモーメント（の大きさ）**という．力のモーメントは別名**トルク**という．

8.2.2 力のモーメントに関する問題

8.3 ベクトル積

8.3.1 ベクトル積の導入

力のモーメントは，位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と力 $\boldsymbol{F}$ とのベクトル積（外積）と呼ばれるものになっている.[1] 記号では

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{8.3.1}$$

のようにベクトル積を「×」で表す．これは「$2 \times 3 = 6$」という掛け算の「×」ではない．ベクトル積という特別な計算を表す記号なので，数字のように省略したり，ドット（・）に置き換えてはいけない．数字のようにスカラー量なら

$$2 \times 3 = 2 \cdot 3 = 6, \quad a \times b = a \cdot b = ab \tag{8.3.2}$$

だが，ベクトルの場合は

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \tag{8.3.3}$$

なのである．$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ がベクトル積（外積），$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ がスカラー積（内積）であり，数字と違って $\boldsymbol{ab}$ のように $\times$ や $\cdot$ を省略した書き方はない．ベクトル積とスカラー積は異なる演算なので，省略してしまうとどっちを指しているのかわからないからである．

8.3.2 ベクトル積の定義

ベクトル積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ はベクトルの掛け算ではなく，２つのベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ から作られる「第３のベクトル」である．成分を使った定義と図形的な定義があり，もちろん２つは等価である．

ベクトル積の成分を使った定義

２つのベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \tag{8.3.4}$$

に対し，これらのベクトル積を

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \tag{8.3.5}$$

と定義する．

[1]ベクトル積という言い方のほうがより正確である．外積はもっと広い概念で，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 以外のものも含む．内積も同様で，ベクトルの内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ 以外にも，直交関数系の内積など，様々な内積を考えることができる．

ベクトル積の図形的な定義

ベクトルは向きと大きさを持った量なので，その 2 つを指定することで $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を定義する．2 つの $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対し，それらのベクトル積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は

- 大きさ：$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$（$\theta$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角）
- 向き：ベクトル $\boldsymbol{a}$ をベクトル $\boldsymbol{b}$ に重ねる向きに回転する右ねじがあったとき，その右ねじの進む方向

と定義される．図 8.2 の通りである．

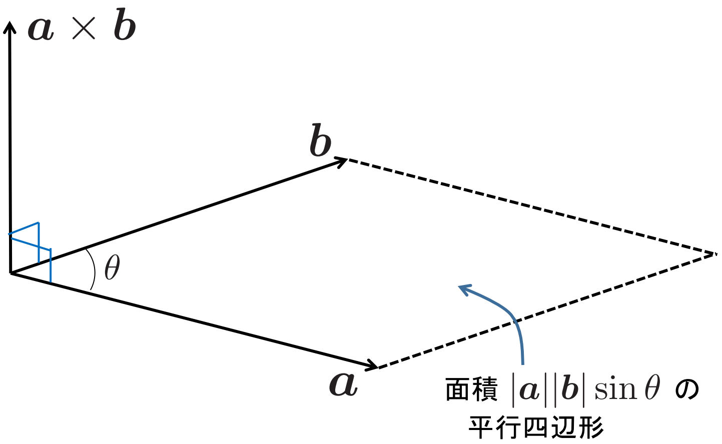

図 8.2: ベクトル積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の図形的な定義．大きさ（長さ）は，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が張る平行四辺形の面積 $S = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$ に等しい．向きは，$\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{b}$ に重ねるように回す方向に回転する右ネジが進む方向．

8.3.3　ベクトル積の特徴

ベクトル積は以下のような特徴を持ち，どれも極めて重要である．

1. 反対称性を持つ．つまり

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \tag{8.3.6}$$

(証明)

図形的な定義からは自明．成分を使う定義でも，

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} b_2a_3 - b_3a_2 \\ b_3a_1 - b_1a_3 \\ b_1a_2 - b_2a_1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \tag{8.3.7}$$

のように，すぐに示せる．

2. 同じベクトル同士でベクトル積を取るとゼロ（ベクトル）．つまり

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0} \tag{8.3.8}$$

(証明)

成分を使うなら

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_2a_3-a_3a_2 \\ a_3a_1-a_1a_3 \\ a_1a_2-a_2a_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0} \tag{8.3.9}$$

のようにすぐわかる．または反対称性の式 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ で $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ とすると

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}) \tag{8.3.10}$$

なので，左辺へ移項して $2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$ より $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ が言える．

図形的な定義を使うなら，$\boldsymbol{a}$ 同士がなす角はもちろんゼロなので，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}$ の大きさは

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\sin 0=0 \tag{8.3.11}$$

となる．大きさがゼロになるベクトルはゼロベクトルしかないので，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ である．

3. 分配則

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} \tag{8.3.12}$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c} \tag{8.3.13}$$

が成り立つ．

(証明)

成分を

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \tag{8.3.14}$$

とすると，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} &= \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (a_2+b_2)c_3-(a_3+b_3)c_2 \\ (a_3+b_3)c_1-(a_1+b_1)c_3 \\ (a_1+b_1)c_2-(a_2+b_2)c_1 \end{pmatrix} \qquad (8.3.15) \\ &= \begin{pmatrix} a_2c_3-a_3c_2 \\ a_3c_1-a_1c_3 \\ a_1c_2-a_2c_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_2c_3-b_3c_2 \\ b_3c_1-b_1c_3 \\ b_1c_2-b_2c_1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}. \qquad (8.3.16)\end{aligned}$$

$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ も同様に示せる．

4. 積の微分公式

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{b}(t)) = \frac{d\boldsymbol{a}(t)}{dt}\times\boldsymbol{b}(t) + \boldsymbol{a}(t)\times\frac{d\boldsymbol{b}(t)}{dt} \tag{8.3.17}$$

がスカラー関数の積の微分公式 $(fg)' = f'g + fg'$ と同様に成り立つ．

(証明)

以下では $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{a}(t) = \dot{\boldsymbol{a}}(t)$ とする．

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{b}(t)) &= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a_2(t)b_3(t) - a_3(t)b_2(t) \\ a_3(t)b_1(t) - a_1(t)b_3(t) \\ a_1(t)b_2(t) - a_2(t)b_1(t) \end{pmatrix} & (8.3.18)\\
&= \begin{pmatrix} \dot{a}_2(t)b_3(t) + a_2(t)\dot{b}_3(t) - \dot{a}_3(t)b_2(t) - a_3(t)\dot{b}_2(t) \\ \dot{a}_3(t)b_1(t) + a_3(t)\dot{b}_1(t) - \dot{a}_1(t)b_3(t) - a_1(t)\dot{b}_3(t) \\ \dot{a}_1(t)b_2(t) + a_1(t)\dot{b}_2(t) - \dot{a}_2(t)b_1(t) - a_2(t)\dot{b}_1(t) \end{pmatrix} & (8.3.19)\\
&= \begin{pmatrix} \dot{a}_2(t)b_3(t) - \dot{a}_3(t)b_2(t) \\ \dot{a}_3(t)b_1(t) - \dot{a}_1(t)b_3(t) \\ \dot{a}_1(t)b_2(t) - \dot{a}_2(t)b_1(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2(t)\dot{b}_3(t) - a_3(t)\dot{b}_2(t) \\ a_3(t)\dot{b}_1(t) - a_1(t)\dot{b}_3(t) \\ a_1(t)\dot{b}_2(t) - a_2(t)\dot{b}_1(t) \end{pmatrix} & (8.3.20)\\
&= \begin{pmatrix} \dot{a}_1(t) \\ \dot{a}_2(t) \\ \dot{a}_3(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{b}_1(t) \\ \dot{b}_2(t) \\ \dot{b}_3(t) \end{pmatrix} & (8.3.21)\\
&= \dot{\boldsymbol{a}}(t)\times\boldsymbol{b}(t) + \boldsymbol{a}(t)\times\dot{\boldsymbol{b}}(t) & (8.3.22)\\
&= \frac{d\boldsymbol{a}(t)}{dt}\times\boldsymbol{b}(t) + \boldsymbol{a}(t)\times\frac{d\boldsymbol{b}(t)}{dt} & (8.3.23)
\end{aligned}$$

5. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の両方に直交する．よって

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = 0, \quad \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = 0 \tag{8.3.24}$$

が成り立つ．

(証明)

図形的には定義のとおり．成分を使う定義でも示せる（→ 宿題）．

6. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の大きさ $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$ は，2 本のベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ が作る平行四辺形の面積に等しい．

(証明)

図形的には定義のとおり．成分を使う定義でも示せる（→ 宿題）．

8.4　ベクトル積と力のモーメント（トルク）

式 (8.2.2) で表された，力のモーメントの大きさ $|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{F}|\sin\theta$ は，位置ベクトル $\boldsymbol{r}$，力のベクトル $\boldsymbol{F}$ のベクトル積の大きさに等しい．つまり

$$|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}| = |\boldsymbol{r}||\boldsymbol{F}|\sin\theta \tag{8.4.1}$$

である．この

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{8.4.2}$$

というベクトル量を，力のモーメントまたはトルクとよぶ．このことからわかるように，力のモーメントはベクトル量であり，向きを持つ．講義で説明するが，その向きは物体が回転するときの回転軸の方向に一致する．