第9章　回転に関わる力：力のモーメントとベクトル積　その2

9.1　はじめに：角運動量と回転の運動方程式

- 回転を引き起こす要素：力のモーメント（トルク）$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$
- 角運動量の定義： $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ （$\boldsymbol{r}$：物体の位置ベクトル，$\boldsymbol{p}$：物体の運動量ベクトル）
- 角運動量はベクトルなので，向きと大きさ（長さ）を持つ
  - 角運動量の向き：回転軸の向きを表す.
    その回転軸を右ねじの進む向きとしたときに，右ねじが回転する方向に物体は回転している.
  - 角運動量の大きさ：面積速度の $2m$ 倍（m は質量）
- 力のモーメントによって，角運動量が時間変化する → 回転の運動方程式 $\dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}$
- 角運動量保存則：力のモーメントがない，もしくは打ち消し合って正味ゼロのとき，角運動量は一定に保たれる（$\boldsymbol{N} = 0$ のとき，$\boldsymbol{L} =$ 一定）

9.2　角運動量

力のモーメント（トルク）$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ が回転運動に関わる量であることはわかるが，これを加えることで時間変化するのはどんな物理量なのか.

---

cf.　運動量の変化と力

力 $\boldsymbol{F}$ を加えると，物体の運動量 $\boldsymbol{p}$ が変化する．つまり

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{9.2.1}$$

が成り立つ．これが本来の，ニュートンの運動の第 2 法則である．運動量は $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ のように質量に速度をかけたものであり，大抵の場合は質量が一定値なので，

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{9.2.2}$$

のように，微分の外にくくり出して書いている．質量が一定でない場合にはこのように質量を微分の外に出すことはできない.

9.2.1 角運動量の定義

力のモーメント $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ を加えたことで変化する物理量を見つけるために，運動方程式 $m\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F}$ を使う．運動方程式の両辺で $\boldsymbol{r}$ とのベクトル積を取り $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ の形を作ると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}\times m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} &= \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} && (9.2.3)\\ \Leftrightarrow m\left(\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right) &= \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} && (9.2.4) \end{aligned}$$

となる． m は定数なので微分の中に出し入れできることを用いた．ここでベクトル積の性質から

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \tag{9.2.5}$$

が成り立つことを用いる．なおこの式の証明は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}) &= \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \quad (\because \text{積の微分公式}) && (9.2.6)\\ &= \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \quad (\because \boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}) && (9.2.7)\\ &= 0+\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \quad (\because \text{同じベクトル同士のベクトル積はゼロ}) && (9.2.8) \end{aligned}$$

の通りである．さて，このことから式 (9.2.4) は

$$\begin{aligned} m\left(\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right)=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \quad &\Leftrightarrow \quad m\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} && (9.2.9)\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} && (9.2.10)\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} && (9.2.11) \end{aligned}$$

と変形できる．ここで m は定数なので，数字の 1 や 2 のように微分の中や外に出し入れすることができること，また運動量が $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$ と書けることを使った．

最後の式 (9.2.11) を見ると，

力のモーメント $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ によって，$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ という物理量が時間変化する

ことがわかる．回転運動において重要であると考えられるこの量

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} \tag{9.2.12}$$

のことを**角運動量**と呼ぶ．この量を

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} \tag{9.2.13}$$

とし，力のモーメントを

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \tag{9.2.14}$$

と書くことにすると，式 (9.2.11) は

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N} \tag{9.2.15}$$

と表すことができ，これは「回転運動の運動方程式」とでも呼ぶべきものである．この方程式は，数式としては並進運動の運動方程式 $\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}$ と全く同じ形をしている．このため，回転運動もこれまでの並進運動と同じような解析方法を用いることができる．並進運動に現れる質量，位置，速度，加速度に対応する物理量も存在する．次回の講義では角運動量の物理的意味と合わせ，回転運動において質量などの役割を果たす物理量を紹介する．

9.2.2　角運動量と面積速度

角運動量 $\boldsymbol{L}$ はベクトル量だが，その向きと大きさは何を表しているのか．

例：等速円運動をしている物体

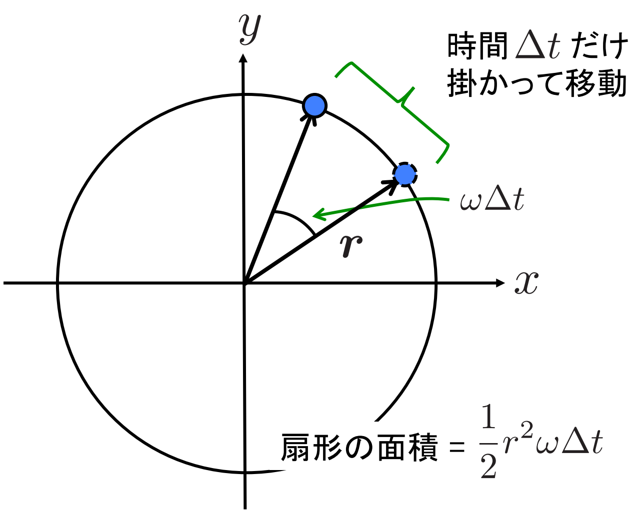

図 9.1: 等速円運動している物体が時間 Δt に描く扇形．この面積 $\dfrac{1}{2}r^2\omega\Delta t$ を時間で割ることで単位時間あたりの面積，すなわち面積速度 $\dfrac{1}{2}r^2\omega$ を得る．

質量 m の物体が xy 平面中で，座標原点を中心として半径 r の等速円運動をしている．角速度を ω，$t=0$ で $\boldsymbol{r} = (x, y, z) = (r, 0, 0)$ にいたとする．この場合の角運動量がどうなるか考える．

物体の位置ベクトルが x 軸となす角は，時刻 t では ωt であることから

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (r\cos\omega t, r\sin\omega t, 0) \tag{9.2.16}$$

である．これを微分して速度 v を求め，それに質量 m を掛ければ運動量 $\boldsymbol{p}$ が

$$\boldsymbol{p}(t) = m\boldsymbol{v} = m\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \tag{9.2.17}$$

$$= (p_x(t), p_y(t), p_z(t)) = (-mr\omega\sin\omega t, mr\omega\cos\omega t, 0) \tag{9.2.18}$$

のように求まる．これらより，角運動量は

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} r\cos\omega t \\ r\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -mr\omega\sin\omega t \\ mr\omega\cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mr^2\omega \end{pmatrix} \tag{9.2.19}$$

となることがわかる．

今，角運動量 $\boldsymbol{L} = (L_x, L_y, L_z)$ は，z 成分が $L_z = mr^2\omega$ で，x 成分と y 成分はゼロである．これは，物体の回転運動が z 軸を回転軸として，xy 平面内で起きていることに対応している．

回転方向は $L_z = mr^2\omega > 0$ なので，z 軸を右ねじの進行方向としたときに，右ねじが回転する向きであることがわかる．今の回転は $\boldsymbol{r} = (r\cos\omega t, r\sin\omega t, 0)$ だから，実際 xy 平面内でそのように回転していることがわかる．もし $L_z < 0$ であれば，回転方向はそれと逆向きである．

大きさは $|\boldsymbol{L}| = mr^2\omega$ だが，これは**面積速度**の $2m$ 倍になっている．面積速度とは，物体と原点を結ぶ線（動径）が単位時間あたりに「掃く」面積である．このケースのように等速円運動なら動径は円の半径のことで，半径が単位時間に描く扇形の面積が面積速度にあたる．

図9.1 は，角速度 ω で等速円運動している物体を表す．等速円運動している物体の動径は，時間 Δt の間に角度 $\omega\Delta t$ 動く．よって扇形の面積は $\dfrac{1}{2}r^2\omega\Delta t$ であり，掛かった時間で割れば単位時間辺りの面積が $\dfrac{1}{2}r^2\omega$ だとわかる．

なお面積速度には「速度」という言葉がついているが，面積速度は単位時間あたりの面積であって，単位時間あたりの長さではない．つまり MKSA 単位なら $\mathrm{m^2/s}$ が面積速度の単位であって，m/s ではないので注意して欲しい．

9.2.3　面積速度とケプラーの第2法則

ケプラーは，太陽系の惑星には以下の3つの法則が成り立つことを見抜いた．

第1法則 惑星の軌道は，太陽を焦点の1つとする楕円軌道である．

第2法則 惑星と太陽を結ぶ動径が描く面積速度は一定である．

第3法則 惑星の公転周期の2乗と，公転軌道の長半径の3乗の比は全ての惑星について一定である．

このうち第2法則に面積速度が含まれている．これは惑星の軌道は図のように楕円軌道であり太陽との距離や速度は時々刻々変化するが，どの時間においても動径が単位時間に掃く面積は一定になるというものである．図9.2 で説明すると，点 A から点 A'，点 B から点 B'，点 C から点 C' に移動するまでにはどれも時間 Δt だけ掛かったとする．このときに動径が描く扇形は形こそ違うが，面積が同じになるということである．これは後で述べるように，地球や他の惑星は太陽から万有引力を受けて運動していることによる．万有引力は「中心力」と呼ばれるタイプの力で，距離にのみ依存し角度には依らない．このような力の下では角運動量が一定になるのだが，角運動量と面積速度は定数倍の違いしかないので面積速度も一定になる．

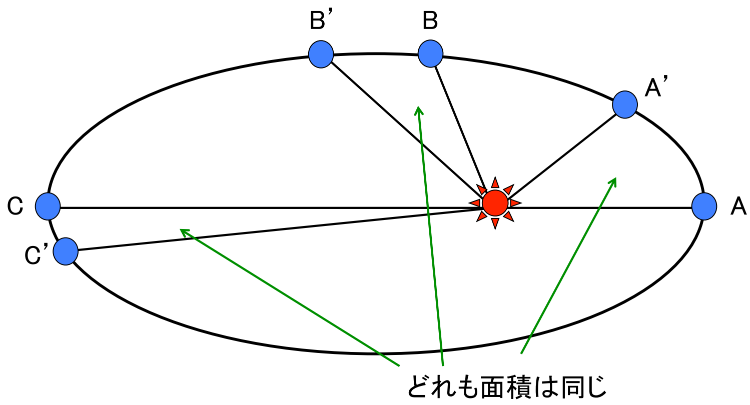

図 9.2: 惑星の公転は面積速度一定則をみたす．点 A から A'，点 B から B，点 C から C' には，どれも同じ時間だけ掛かって移動している．

9.3　回転の運動方程式と角運動量保存則

回転の運動方程式

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N} \tag{9.3.1}$$

を見ると，力のモーメント（トルク）$\boldsymbol{N}$ がないとき，または打ち消し合って正味ゼロになるとき，

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{L} = \text{一定} \tag{9.3.2}$$

となることがわかる．文章でまとめると

> **物体に働く力のモーメント（トルク）がない，または正味ゼロのとき，物体の角運動量は一定に保たれる**

となる．これを**角運動量保存則**という．

ケプラーの第 2 法則である面積速度一定則が成り立つのは，地球などの惑星に太陽から働く万有引力のモーメントがゼロであり，角運動量が保存するためである（角運動量は面積速度の $2m$ 倍なので m が一定である限り，角運動量が保存するとき面積速度も保存する）．