この運動方程式以外に，剛体を回転させる原因である力のモーメントの大きさが Fa であること，およびそれを使うとこの剛体の回転の運動方程式が

$$I\ddot{\varphi} = Fa \tag{10.3.3}$$

も成り立つ．ここで φ は最初の状態から測った，剛体の回転を表す角度である．また，図より剛体が斜面に沿って進んだ距離 x と，剛体の回転角 φ の間には $x = a\varphi$ の関係があることもわかる．

こうして得られた斜面方向の運動方程式・回転の運動方程式および x と φ の関係式を使うと $\ddot{x}$ は g, M, θ, I を使って

$$\ddot{x} = \frac{M}{M + \frac{I}{a^2}} g \sin\theta \tag{10.3.4}$$

が導ける．(→宿題）この結果へ球・円柱・球殻・円柱殻の慣性モーメントの値を代入すればそれぞれの場合の加速度が求まる.[3] また，摩擦がない場合に傾き θ の斜面を滑る質点の加速度も求め，比較することも可能である．

10.4　参考：連続体の慣性モーメントの計算法（フローチャート）

慣性モーメントの計算を苦手とする人は多いが，そんなにたいしたことではない．ようは

<u>微小質量 dm とその微小質量から回転軸までの距離 $R(\boldsymbol{r})$</u>

を求め，上の表にある定義に従って積分するだけである． そこで実際に

1. 微小質量を求める
2. 回転軸までの距離を求める
3. 積分する

という 3 つのステップに分けて説明しよう．

[3]慣性モーメントの例にも書いたが，円柱と薄い円板とではどちらも慣性モーメントが $I = \frac{1}{2}Ma^2$ となる．なぜ同じなのか考えてみて欲しい．

ステップ１：微小質量を求める

基本中の基本から始めよう．中学校で教わったように

（質量）＝（密度）×（体積）

である．数式で書けば M を質量, ρ を密度，V を体積として

$$M = \rho \times V \tag{10.4.1}$$

である．ただし物体も場所によって濃かったり薄かったりするかもしれないから，一般的には密度は $\rho(\boldsymbol{r})$ としておくべきだろう．つまり位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ で指定される点 (x, y, z)（位置ベクトルの先が指しているところ）の密度が $\rho(\boldsymbol{r}) = \rho(x, y, z)$ ということである．

次に点 (x, y, z) の周辺にとても小さい領域を考えて，その体積を dV としよう．その領域が非常に小さいなら，その中で密度はほとんど変わらないはずだから，その領域の質量は「密度×体積」として差し支えないだろう．つまり

$$dm = \rho(\boldsymbol{r})\ dV \tag{10.4.2}$$

である．もし剛体の全質量 M を求めたければこの量を剛体全体にわたって足し上げる，つまり積分すればよく

$$M = \int_{\text{剛体全体}} dm = \int_{\text{剛体全体}} \rho(\boldsymbol{r})\ dV \tag{10.4.3}$$

とすればよい．ところでこの計算をするときは剛体の形状によって便利な座標を選び

- デカルト座標では $dV = dxdydz$
- 3 次元極座標では $dV = r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi$
- 3 次元円柱座標では $dV = rdrd\theta dz$

のように異なる微小体積素を使うことになる.[4]

ここで注意しなければならないのは，剛体の形によって，違う密度を使っている可能性があることである．というのも，ここまでは「密度」として

$$\text{密度} = \text{単位体積あたりの質量} = \frac{\text{質量 } M}{\text{体積 } V} \tag{10.4.4}$$

で定義される**体積密度**を使ってきた.[5] しかし物体の形によっては「単位面積あたりの質量」や「単位長さあたりの質量」の方が重要なことも多い．例えば導線を考えてみて欲しい．導線を 2m 買うというのはわかるが，導線を $2\mathrm{m}^3$ 買うというのはあまり聞いたことがない．もちろん導線の断面積がわかっていれば長さと掛けて体積は出せるが，何か面倒だ．こっちが売る側でそんなことを言ってくる客が来たら張り倒すか殴り倒すかしたくなる．どっちの方が効果的に倒せるかはともかく，導線のような細長い物体に関しては 1cm あたりどのくらいの重さなのかとか，1m あたりいくらなのかといった「単位長さあ

[4]なぜこうなるのか，これを求めるのに使うヤコビアンとは何なのかについては物理数学の「重積分」で紹介されると思う．
[5]話を簡単にするために密度は一定としている．

たりの量」が重要なのだ．この「単位長さあたりの質量」のことを**線密度**という．一様な物体（どこでも均一で，ギュッと詰まっているところやスカスカのところがない物体）なら

$$\text{線密度 } \lambda = \text{単位長さあたりの質量} = \frac{\text{質量 } M}{\text{物体の長さ } L} \tag{10.4.5}$$

である．

逆に線密度 $\lambda(x)$ が与えられていて，そこから全質量を求めたければ微小質量を物体に沿って積分すればよい．この場合，位置 x における線密度を $\lambda(x)$ とするとそのごくごく付近では線密度は一定と見なせるだろうから，その付近（x から $x+dx$ の辺り）の微小な長さ dx の質量は

$$dm = \lambda(x)dx \tag{10.4.6}$$

となるはずである．ここで物体に沿って x 軸を張ってあるとした．あとはこれを

$$M = \int_0^L \lambda(x)dx \tag{10.4.7}$$

のように物体に沿って積分すれば全質量が求まる．ここで物体は $x = 0$ から $x = L$ まで伸びているものとした．

平べったい板のような形をしたものも同様で，この場合は「単位面積あたりの量」が重要になる．$1\mathrm{m}^2$ あたり何 kg なのか，とかである．[6]「単位面積あたりの質量」は**面密度**といい，一様な物体なら

$$\text{面密度 } \sigma = \text{単位面積あたりの質量} = \frac{\text{質量 } M}{\text{物体の面積 } S} \tag{10.4.8}$$

で求めることができる．

逆に面密度 $\sigma(x,y)$ が与えられているなら，点 (x,y) における密度が $\sigma(x,y)$ ということだが，その点のごく近くに微小な領域を考え，その面積を dS とすればその微小部分の質量は

$$dm = \sigma dS \tag{10.4.9}$$

で求まる．これを物体全体にわたって積分すれば全質量が

$$M = \int_{\text{物体の面積}} \sigma dS \tag{10.4.10}$$

のように求まる．ここで dS は座標ごとに違っていて，

- デカルト座標では $dS = dxdy$
- 2 次元極座標では $dS = rdrd\theta$ (r：動径，θ：角度)

である．

[6] 平べったいものと言えばヒラメの単位面積あたりの質量はどのくらいなのだろう．カレイと同じくらいだろうか．マンボウではどうだろう．どうでもいいが，マンボウを正面から見たいと思うのは俺だけではあるまい．

ステップ２：微小部分から固定軸までの距離を求める

実はこの部分が慣性モーメントの計算のキモかもしれない．見た目だけから言うと慣性モーメントの計算は重積分のところが一番難しく見えるが，あれは約束に従って計算するだけだからあまり頭を使う必要がないのだ．それに引き換え，このステップの計算は立体の適当な断面を考えなければならず，脳が汗をかくような気がする（例えば円柱の，中心を通らないような軸周りの慣性モーメントなど）．

残念ながらこの計算には一般論がないので，具体例を使うことにしよう．以下では考えている剛体中の任意の点を P としている．必ず自分で図を描きながら読んでみること．

例 1: 質量 M, 半径 a の十分薄い板の中心を通り板に垂直な固定軸

$\rightarrow$ P の軸からの距離は r．よって $R = r$.

例 2: 質量 M, 半径 a, 高さ h の円柱の中心を通り円柱に平行な固定軸

$\rightarrow$ P の軸からの距離は高さに関係なく r．よって $R = r$.

例 3: 質量 M, 半径 a の細い円輪の中心を通り円に垂直な固定軸

$\rightarrow$ 円輪の半径は a で，P は当然輪の上．よって $R = a$

例 4: 質量 M, 半径 a の球の中心を通る固定軸

$\rightarrow$ P(x, y, z) は極座標で $(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$ で表される． z 軸を回転軸とすると（球であれば x, y, z 軸のどれを回転軸にとっても結果が変わらないのは明らか），その距離は $R = r\sin\theta$.

例 5: 質量 M, 半径 a の薄い球殻（中がからっぽの球）の中心を通る固定軸

$\rightarrow$ P は半径 a の球の表面上．よって前問を使って $R = a\sin\theta$.

例 6: 質量 M, 長さ $2a$ の細い棒の中点を通り棒に垂直な固定軸

$\rightarrow$ 中点を原点として棒に沿って x 軸を張る．明らかに座標 x にある P と回転軸との距離は $R = |x|$.

ステップ３：積分する

このステップでは重積分をしなければならないことが多いのでビビってしまう人も多いだろう．しかし，実はこのステップが一番機械的なので楽なのである．積分という演算はそのくらい高度な道具だということだ．マスターしないなんて選択肢はあり得ない．ここではステップ 2 であげた例を実際計算してみよう．

例 1: 質量 M, 半径 a の十分薄い板の中心を通り板に垂直な軸周りの慣性モーメント

$\rightarrow$ 面状の剛体なので面密度を考えると $\sigma = \dfrac{M}{\pi a^2}$.

微小質量はこの σ を使って $dm = \sigma dS = \sigma r dr d\theta$（円形なので 2 次元極座標を使った）．

P の軸からの距離は $R=r$ なので

$$\begin{aligned} I &= \int dmR^2 = \int \sigma r dr d\theta\ r^2 = \int \sigma r^3 dr d\theta \\ &= \sigma \int_0^a r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{M}{\pi a^2}\cdot\frac{1}{4}a^4\cdot 2\pi = \frac{1}{2}Ma^2 \end{aligned} \tag{10.4.11}$$

例 2: 質量 M, 半径 a, 高さ h の円柱の中心を通り円柱に平行な軸周りの慣性モーメント

→ 筒状の物体で中が詰まっているので体積密度を考えると $\rho=\dfrac{M}{\pi a^2 h}$.

微小質量はこの ρ を使って $dm=\rho dV=\rho r dr d\theta dz$ （筒状なので 3 次元円柱座標を使った）.

P の軸からの距離は高さに関係なく $R=r$ なので

$$\begin{aligned} I &= \int dmR^2 = \int \rho r dr d\theta dz\ r^2 = \int \rho r^3 dr d\theta dz \\ &= \rho \int_0^a r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \frac{M}{\pi a^2 h}\cdot\frac{1}{4}a^4\cdot 2\pi\cdot h = \frac{1}{2}Ma^2 \end{aligned} \tag{10.4.12}$$

例 3: 質量 M, 半径 a の細い円輪の中心を通り円に垂直な軸周りの慣性モーメント

→ 輪状の 1 次元物体なので線密度を考えると $\lambda=\dfrac{M}{2\pi a}$.

微小質量はこの λ を使って $dm=\lambda dx$ （輪に沿って x 軸を取った）.

P から軸までの距離は $R=a$ なので

$$I = \int dmR^2 = \int_0^{2\pi a} \lambda dx\ a^2 = \frac{M}{2\pi a}\cdot 2\pi a\cdot a^2 = Ma^2 \tag{10.4.13}$$

例 4: 質量 M, 半径 a の球の中心を通る軸周りの慣性モーメント

→ 球状の物体で中が詰まっているので体積密度を考えると $\rho=\dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi a^3}$.

微小質量はこの ρ を使って $dm=\rho dV=\rho r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi$ （球状なので 3 次元極座標を使った）.

P の軸からの距離は $R=r\sin\theta$ なので

$$\begin{aligned} I &= \int dmR^2 = \int \rho r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi (r\sin\theta)^2 = \int \rho r^4 \sin^3\theta dr d\theta d\varphi \\ &= \rho \int_0^a r^4 dr \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi a^3}\cdot\frac{1}{5}a^5\cdot\frac{4}{3}\cdot 2\pi = \frac{2}{5}Ma^2 \end{aligned} \tag{10.4.14}$$

ここで $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ より

$$\int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta = \int_0^{\pi}\left(\frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta\right)d\theta = \left[-\frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{12}\cos 3\theta\right]_0^{\pi} = \cdots = \frac{4}{3} \tag{10.4.15}$$

を使った.

例 5: 質量 M, 半径 a の薄い球殻（中がからっぽの球）の中心を通る軸周りの慣性モーメント

解き方その 1

$\to$ 球状だが薄い殻しかないので平べったい物体と同様に面密度を考えると $\sigma = \dfrac{M}{4\pi a^2}$.

微小質量はこの σ を使って $dm = \sigma dS = \sigma a^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ （球の表面を表す微小面積素を使った）.

P の軸からの距離は $R = a\sin\theta$ なので

$$\begin{aligned} I &= \int dmR^2 = \int \sigma a^2 \sin\theta d\theta d\varphi (a\sin\theta)^2 = \int \rho a^4 \sin^3\theta dr d\theta d\varphi \\ &= \rho a^4 dr \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{M}{4\pi a^2}\cdot a^4 \cdot \frac{4}{3}\cdot 2\pi = \frac{2}{3}Ma^2 \end{aligned} \tag{10.4.16}$$

解き方その２

例4の問題を応用し，外半径 a, 内半径 b の球を考える．つまり例4の球で，その中心から半径 b の球をくりぬいたものを考え，最後に $b \to a$ の極限を取る作戦である．この場合，密度が

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi(a^3 - b^3)} \tag{10.4.17}$$

となることと，r の積分範囲が 0 から a ではなく b から a までになることに気をつければよい．よってまず厚さ $a - b$ の厚みがある球殻の慣性モーメントは

$$\begin{aligned} I &= \int dmR^2 = \int \rho r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi (r\sin\theta)^2 = \int \rho r^4 \sin^3\theta dr d\theta d\varphi \\ &= \rho \int_b^a r^4 dr \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi(a^3-b^3)}\cdot\frac{1}{5}(a^5 - b^5)\cdot\frac{4}{3}\cdot 2\pi \quad (10.4.18) \\ &= \frac{2}{5}M\frac{a^5-b^5}{a^3-b^3} \quad (10.4.19) \end{aligned}$$

と求まるので，厚みのない球殻の慣性モーメントは

$$\begin{aligned} \lim_{b\to a}\frac{2}{5}M\frac{a^5-b^5}{a^3-b^3} &= \lim_{b\to a}\frac{2}{5}M\frac{(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)} \quad (10.4.20) \\ &= \frac{2}{5}M\frac{5a^4}{3a^2} = \frac{2}{3}Ma^2. \quad (10.4.21) \end{aligned}$$

例6: 質量 M, 長さ $2a$ の細い棒の中点を通り棒に垂直な軸周りの慣性モーメント

$\to$ 棒状の1次元物体なので線密度を考えると $\lambda = \dfrac{M}{2a}$.

微小質量はこの λ を使って $dm = \lambda dx$ （棒に沿って x 軸を取った）.

棒の中点を x 軸の原点とすると P から軸までの距離は $R = |x|$ なので

$$I = \int dmR^2 = \int_{-a}^{a} \lambda dx\ |x|^2 = 2\lambda\int_0^a x^2 dx = 2\cdot\frac{M}{2a}\cdot\frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{3}Ma^2. \tag{10.4.22}$$

他にも平行軸の定理や薄板の直交軸の定理を使うと簡単に求められる慣性モーメントもある．どの力学の問題集にも載っているので，自分でいろいろ当たってみてほしい．ついでと言っては何だが，せっかくの機会なので数学の問題集にある重積分の問題にも当たってみるとよいと思う．