第2章　空気抵抗を受ける落体の運動

2.1　講義内容のまとめ

- 速度に比例する抵抗力が加わった場合の落体の運動について考える
- 変数分離法を用いて速度を計算できる

2.2　空気抵抗を受ける落体

2.2.1　復習：一定の加速度の下での運動（1次元）

加速度を a とし，一定であるとする．初速を v_0，初期位置を x_0 とすると速度は

$$v(t)=\int a dt = at + C_1 \quad (C_1\text{は積分定数}) \tag{2.2.1}$$

で，初期条件より $t=0$ で $v=v_0$ なので，$C_1=v_0$．よって

$$v(t)=v_0+at. \tag{2.2.2}$$

さらに位置は

$$x(t)=\int v dt=\int (v_0+at)dt = v_0t+\frac{1}{2}at^2+C_2 \quad (C_2\text{は積分定数}) \tag{2.2.3}$$

で，同じく初期条件より $t=0$ で $x=x_0$ なので $C_2=x_0$．よって

$$x(t)=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2. \tag{2.2.4}$$

例題 2.1.1：まさつのない斜面を滑る物体の運動

水平面と角 θ をなし，まさつのない斜面を滑る物体の運動について考える．重力加速度の大きさを g とし，斜面に沿って下向きに x 軸を取るとき，

(1) 物体が斜面から受ける垂直抗力の大きさを求めよ．ただし物体の質量は m とする.（略解：$mg\cos\theta$）

(2) 物体の斜面方向の加速度 $a(t)$ を求めよ.（略解：$g\sin\theta$）

(3) 物体の斜面方向の速度 $v(t)$ を積分を用いて求めよ．ただし $t=0$ で $v=0$ とする．また $a-t$ グラフと $v(t)$ の関係を説明せよ.（略解：$v(t)=g\sin\theta\cdot t$）

(4) 物体の斜面方向の位置 $x(t)$ を積分を用いて求めよ．ただし $t=0$ で $x=x_0$ とする．また $v-t$ グラフと $x(t)$ の関係を説明せよ．（略解：$x(t)=x_0+\frac{1}{2}g\sin\theta\cdot t^2$）

2.2.2　速度に比例する抵抗力を受ける落体の運動（1 次元）

雨滴の運動などからわかるように，物体は落下する際に空気抵抗を受ける．速度があまり大きくない場合は，空気抵抗は速度に比例する．よって運動方程式は

$$ma = mg - kv \tag{2.2.5}$$

となる．この式から，物体の速度 v や位置 x を求めたい．

$\rightarrow$ 変数分離法を使うと解けることが知られている．

変数分離法

次のタイプの微分方程式を考える：

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y). \tag{2.2.6}$$

両辺を $g(y)$ で割って，x で積分すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} &= f(x) && (2.2.7)\\ \Rightarrow \int \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx}dx &= \int f(x)dx && (2.2.8)\\ \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} &= \int f(x)dx && (2.2.9) \end{aligned}$$

となり，左辺は y のみの関数を y で積分，右辺は x のみの関数を x で積分できる形になっており，当初の微分方程式に比べるとかなり見通しがよい．なお両辺とも不定積分なので積分定数が出るが，任意の定数なのでどちらか一つにまとめて付けておけばよい．

例題 2.2.1：変数分離法の練習

以下の微分方程式を変数分離法で解け．ただし，いずれも条件として $x = 0$ で $y = 1$ が与えられている．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 2y$　　(2) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$　　(3) $\dfrac{dy}{dx} = xy$

(略解：(1) $y = e^{2x}$　(2) $x^2 + y^2 = 1$（または $y = \pm\sqrt{1-x^2}$）　(3) $y = 3e^{\frac{1}{2}x^2}$)

再び，空気抵抗を受ける落下運動について考える．式 (2.2.5) は $a = \dfrac{dv}{dt}$ を使って書き換えると

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}\left(v - \frac{mg}{k}\right) \tag{2.2.10}$$

なので，変数分離法が使える形になっている．両辺を $v-\dfrac{mg}{k}$ で割って t で積分すると $\ln=\log_e$ を用いて

$$\begin{aligned}\int\frac{dv}{v-\frac{mg}{k}} &= -\int\frac{k}{m}dt &(2.2.11)\\ \Rightarrow \ln\left|v-\frac{mg}{k}\right| &= -\frac{k}{m}t+C\quad(C\text{ は積分定数}) &(2.2.12)\\ \Rightarrow \left|v-\frac{mg}{k}\right| &= e^{-\frac{k}{m}t+C}=e^{C}\cdot e^{-\frac{k}{m}t} &(2.2.13)\\ \Rightarrow v-\frac{mg}{k} &= \pm e^{C}\cdot e^{-\frac{k}{m}t}=A\cdot e^{-\frac{k}{m}t}\quad(A=\pm e^{C}), &(2.2.14)\end{aligned}$$

と計算できる．よって

$$v=\frac{mg}{k}+Ae^{-\frac{k}{m}t} \tag{2.2.15}$$

となる．ここで A は任意定数である（なぜなら $A=\pm e^{C}$ において $-\infty<C<\infty$ である）．計算途中で使った $\ln=\log_e$ は自然対数という．

初期条件として $t=0$ で $v=0$ という状況を考えると，

$$0=\frac{mg}{k}+Ae^{-\frac{k}{m}\cdot 0}=\frac{mg}{k}+A,\quad \therefore A=-\frac{mg}{k} \tag{2.2.16}$$

と決まり，最終的に

$$v(t)=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right) \tag{2.2.17}$$

と求まる．

例題 2.2.2：空気抵抗を受ける落体の運動

式 (2.2.17) などを使い，以下の問いに答えよ．

(1) 終端速度（$t\to\infty$ での速度）を求めよ．

(2) $t=0$ での加速度を求めよ．

(3) $v-t$ グラフを書け．

(略解) (1) $\dfrac{mg}{k}$　(2) g　(3)