物理学概論 まとめ

東京学芸大学 自然科学系 物理科学分野 小林晋平

2018.12.14 第 2 版

目 次

第Ⅰ部	力学	
第1章	力学の目標と運動の表し方	
1.1	はじめに	
1.2	位置・速度・加速度の関係	
	1.2.1 1次元の運動	
	1.2.2 2次元以上の運動とベクトル	
1.3	ベクトル値関数の微分	
1.4	積分	
	1.4.1 1次元のとき	
	1.4.2 3次元のとき	
1.5	落体の運動(1 次元)	
	1.5.1 自由落下	
	1.5.2 鉛直投げ上げ	
1.6	落体の運動(2 次元)	
	1.6.1 水平投射	
	1.6.2 斜方投射	
第2章	空気抵抗を受ける落体の運動	1
2.1	講義内容のまとめ	
2.2	空気抵抗を受ける落体	
	2.2.1 復習:一定の加速度の下での運動(1次元)	
	2.2.2 速度に比例する抵抗力を受ける落体の運動(1 次元)	
第3章	等速円運動と単振動	1
3.1	等速円運動	
0.1	3.1.1 角速度	
	3.1.2 等速円運動の位置ベクトル・速度ベクトル・加速度ベクトル	•
3.2	単振動	•
3.3	単振動タイプの微分方程式の解き方	•
5.5	3.3.1 実一般解の求め方	•
	3.3.2 初期条件の使い方	
3.4	単振動の例	•
3.4	3.4.1 ばねに付けられたおもりの振動	•
	3.4.2 単振り子	
	3.4.3 電気振動	
第4章	2 階線形微分方程式の解法	6
4.1	定数係数の2階線形常微分方程式	
	4.1.1 微分方程式の形	
	POOR OF THE S. C. IV	

	4.1.2 独立な解と線形結合	28
4.2	復習:単振動タイプの微分方程式	28
	4.2.1 単振動タイプの微分方程式の複素一般解	28
4.3	応用:減衰振動	30
	4.3.1 摩擦項入りの単振動タイプの微分方程式の解き方	31
第5章	仕事と運動エネルギー	35
5.1	はじめに	35
5.2	仕事	35
J.2	5.2.1 直線運動のとき	35
	5.2.2 仕事と仕事率	37
	5.2.3 参考:曲線に沿う仕事と線積分(講義では扱わない)	37
5.3	仕事と運動エネルギー	38
0.0	5.3.1 仕事による運動エネルギーの変化	38
第6章		43
6.1	はじめに	43
6.2	ポテンシャルエネルギー(位置エネルギー)と力学的エネルギー保存則	43
	6.2.1 保存力	43
	6.2.2 ポテンシャルエネルギー	44
	6.2.3 力学的エネルギーが保存しないのはどんなときか?	45
	6.2.4 ポテンシャルエネルギーの例	47
	6.2.5 ポテンシャルエネルギーが経路によらないこと	52
	6.2.6 参考:3 次元でのポテンシャルエネルギーと力学的エネルギー保存則(講義では	
	扱わない)	52
6.3	ポテンシャルと運動の概形	53
第7章	運動量・力積と運動量保存則	55
7.1	はじめに	55
7.2	運動量と力積	55
	7.2.1 運動量の定義	55
	7.2.2 運動方程式との関係	56
	7.2.3 運動量で見るか,運動エネルギーで見るか	56
7.3	運動量保存則	57
7.4		60
	7.4.1 重心の定義	60
		60
		61
第8章	回転に関わる力:力のモーメントとベクトル積 その 1	63
8.1		63
8.2		63
		63
		65
8.3		65
		65
	8.3.2 ベクトル積の定義	65

	8.3.3 ベクトル積の特徴	66
8.4	ベクトル積と力のモーメント(トルク)	68
第9章	回転に関わる力:力のモーメントとベクトル積 その2	71
9.1	はじめに:角運動量と回転の運動方程式	71
9.2	角運動量	71
9.4	9.2.1 角運動量の定義	72
	9.2.2 角運動量と面積速度	73
	9.2.3 面積速度とケプラーの第 2 法則	74
9.3	回転の運動方程式と角運動量保存則	75
第 10 章	:慣性モーメントと剛体の運動	77
10.1	はじめに:	77
10.2	慣性モーメント	77
	10.2.1 質点系の角運動量と慣性モーメント	77
	10.2.2 慣性モーメントと角運動量保存則	79
	10.2.3 回転の運動方程式の表し方	80
10.3	連続体の慣性モーメント・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	81
10.0	10.3.1 慣性モーメントについて成り立つ定理(詳細は省く、講義では扱わない)	81
	10.3.2 いろいろな剛体の慣性モーメント(講義では結果のみ扱う. 証明は次節以降)	82
	10.3.3 斜面を転がる剛体の加速度	84
10.4		
10.4	参考:連続体の慣性モーメントの計算法(フローチャート)	85
第II部	電磁気学	91
第 11 章	・ クーロン力と電場	93
11.1	はじめに	93
	クーロン力と電場	
11.2	11.2.1 電気の源	93
	11.2.1 ·································	
	11 9 9 ベクトルに トスクーロンカの表示	
	11.2.2 ベクトルによるクーロン力の表示	94
11.9	11.2.3 クーロン力の重ね合わせ	94 95
11.3	11.2.3 クーロン力の重ね合わせ	94 95 96
11.3	11.2.3 クーロン力の重ね合わせ	94 95 96 96
11.3	11.2.3 クーロン力の重ね合わせ	94 95 96 96
11.3	11.2.3 クーロン力の重ね合わせ	94 95 96 96 97
11.3	11.2.3 クーロン力の重ね合わせ ガウスの法則と電場 11.3.1 電場と力 11.3.2 ベクトル場とスカラー場 11.3.3 点電荷が作る電場 11.3.4 その他の電場の例	94 95 96 96 97 97
11.3	11.2.3 クーロン力の重ね合わせ	94 95 96 96 97
	11.2.3 クーロン力の重ね合わせ ガウスの法則と電場 11.3.1 電場と力 11.3.2 ベクトル場とスカラー場 11.3.3 点電荷が作る電場 11.3.4 その他の電場の例 11.3.5 ガウスの法則	94 95 96 96 97 97
第 12 章	11.2.3 クーロン力の重ね合わせ	94 95 96 96 97 97 98 99
第 12 章 12.1	11.2.3 クーロン力の重ね合わせ	94 95 96 97 97 98 99 103
第 12 章 12.1	11.2.3 クーロン力の重ね合わせ	94 95 96 96 97 97 98 99 103 103
第 12 章 12.1	11.2.3 クーロン力の重ね合わせ	94 95 96 96 97 97 98 99 103 103 103
第 12 章 12.1	11.2.3 クーロン力の重ね合わせ	94 95 96 96 97 97 98 99 103 103 103 104
第 12 章 12.1	11.2.3 クーロン力の重ね合わせ	94 95 96 96 97 97 98 99 103 103 103 104
第 12 章 12.1 12.2	11.2.3 クーロン力の重ね合わせ	94 95 96 96 97 97 98 99 103 103 103 104 107

		12.3.1 磁	雄荷と磁気	量							 	 		 	 	 	108
		12.3.2 磁	銭場と磁束	密度							 	 		 	 	 	109
		12.3.3 磁	も 場の作り	方:ビス	・サ	ヴァ	Р — ,	ルの	法具	Į[]	 	 		 	 	 	110
		12.3.4 7	ンペール	の法則.							 	 		 	 	 	110
	12.4	電磁誘導									 	 		 	 	 	112
		12.4.1 電	磁誘導の	概略							 	 		 	 	 	112
		12.4.2 電	磁誘導の	法則							 	 		 		 	113
		12.4.3 ⊏	ーレンツ	力							 	 		 	 	 	114
	12.5	マクスウ	ェル方程	式と電磁	波						 	 		 		 	114
		12.5.1	クスウェ	ル方程式	<u>.</u>						 	 		 	 	 	114
		12.5.2 電	磁波								 	 		 	 	 	116
		12.5.3 電	遠磁波と光								 	 		 	 	 	117
付:	録 A	線積分と	面積分														119
	A.1	線積分 .									 	 		 	 	 	119
		A.1.1 ス	カラー場	の線積を	٠. ١						 	 		 		 	119
		A.1.2 奶	長パラメ	ーターに	よる	線和	責分				 	 		 		 	121
		A.1.3	ベクトル場	の線積ケ	٠. ١						 	 		 		 	122
	A.2	面積分 .									 	 	 	 	 	 	123
		A.2.1 ス	カラー場	の面積を	٠. ١						 	 		 		 	123
		A 2.2 ^	ントル場	の面積を	}												125

第Ⅰ部

力学

第1章 力学の目標と運動の表し方

1.1 はじめに

- 力学とは?
 - → 平たく言えば、力に応じて物体がどう運動するかを(時間の関数として)記述する理論.
- 運動の様子は位置 x(t)・速度 v(t) で記述できる.
- 物体の位置 x(t)・速度 v(t)・加速度 a(t) は相互に微分積分で結ばれている。加速度を求め、積分すれば物体の運動が求まる(原理的には)。運動方程式 $a=\frac{F}{m}$ はそのために加速度を出す式。

1.2 位置・速度・加速度の関係

1.2.1 1次元の運動

位置を時間で微分したものが速度.速度を時間で微分したものが加速度.

位置:
$$x(t)$$
, 速度: $v(t) = \frac{dx}{dt}$, 加速度: $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ 加速度 $a(t)$, 速度 $v(t) = \int^t a(t')dt'$, 位置 $x(t) = \int^t v(t')dt' = \int^t \left(\int^{t'} a(t'')dt''\right)dt'$

例題 2.1.1: 微分で速度を求める

時刻 t における位置が $x(t)=t^2$ で表される運動をしている物体がある.この物体の速度と加速度を求めよ.

解

時刻 t に $0,1,2,\cdots$ などを代入していくと,この物体は時刻 $t=0,1,2,3,\cdots$ において $x=0,1,4,9,\cdots$ のように位置が変化していくことがわかる.だんだん移動距離が伸びていることから,この動きは等速直線運動ではない.このため,物体の速度を求めるには微分するしかない.よって

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2) = 2t$$

より、時刻 t での物体の速度は v(t) = 2t である.

同様に、加速度は速度の変化からわかる. 微分して

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(2t) = 2$$

と求めてもよいが、v(t)=2t という結果から、時刻が $t=0,1,2,3,\cdots$ と進むにつれて、 $v=0,2,4,6,\cdots$ と 2 ずつ、一定のペースで増えていくことがわかる。つまりこの運動は等加速度運動である。このこと から a=2 と求めてもよい。

1.2.2 2次元以上の運動とベクトル

- 速度や位置は大きさと方向を持つので、ベクトルで表すと都合がよい、ベクトルで表される関数 をベクトル値関数という。
- ベクトル量は、 \vec{A} のような矢印以外に、 \vec{A} のように太字でも表す。印刷物では太字だが、手書きの時は A, B, \mathbb{C} , \cdots のように二重線で表す。
- 3次元空間なら、ベクトル値関数は成分を 3 つ持つ。通常は x,y,z 方向の 3 つの成分を考える。例:位置ベクトル $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ 、電場ベクトル $\mathbf{E}(t)=(E_x(t),E_y(t),E_z(t))$ 縦ベクトルとして書くことも多い。
- ・ 温度・質量・密度のように、大きさのみで方向を持たない量はスカラーという.¹
- 2次元以上だとベクトルを使う、というわけではない. 1次元でも速度や力のようなベクトル量は存在する. しかし、1次元だとベクトルで書いても成分が一つしかないので、通常は成分を書いてそれをベクトルと呼んでいるだけ.

例:1次元の速度ベクトル: $\mathbf{v} = (v)$ (成分が1つしかないのでv のことを「速度」と呼んでいるが、正確には速度のx 成分である。これを整理しておくと、運動量を使った1次元の衝突問題で間違えなくなる。)

1.3 ベクトル値関数の微分

ベクトル値関数の微分は成分ごとに行えばよい(ただしデカルト座標のときのみ、極座標など,異なる座標系を使う時は注意)。 3 次元空間なら x,y,z 方向の 3 つの成分があるので,普通の微分を 3 回行うことになる.

- 位置ベクトル: $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ $\Rightarrow 速度ベクトル: \mathbf{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t)) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}\right)$
- 速度ベクトル: $\mathbf{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$ $\Rightarrow 加速度ベクトル: \mathbf{a}(t) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t)) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \left(\frac{dv_x(t)}{dt}, \frac{dv_y(t)}{dt}, \frac{dv_z(t)}{dt}\right)$

¹さらに上位の概念としてテンソルというものもある.

1.4. 積分 11

● 加速度ベクトルは位置ベクトルを時間で2回微分したもの:

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2} = \left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}, \frac{d^2y(t)}{dt^2}, \frac{d^2z(t)}{dt^2}\right)$$

例題 3.1 ある物体の時刻 t における位置ベクトルが

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (t^2, a \sin t, e^{-2bt})$$
 $(a, b$ は定数)

であるとき、時刻tでのその物体の速度、加速度を求めよ.

解: 速度,加速度をそれぞれ $\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{a}(t)$ とすると

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \left(\frac{d}{dt}\left(t^2\right), \frac{d}{dt}\left(a\sin t\right), \frac{d}{dt}\left(e^{-2bt}\right),\right) = \left(2t, a\cos t, -2be^{-2bt}\right)$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \left(\frac{d}{dt}\left(2t\right), \frac{d}{dt}\left(a\cos t\right), \frac{d}{dt}\left(-2be^{-2bt}\right),\right) = \left(2, -a\sin t, 4b^2e^{-2bt}\right)$$

1.4 積分

積分も微分同様,成分ごとに積分する(ただしこれも,デカルト座標のときだけ).加速度を積分すると速度,速度を積分すると位置が得られる.

1.4.1 1次元のとき

加速度 a を積分したものが速度 v, 速度 v を積分したものが位置 x:

$$v(t) = \int a(t')dt', \quad x(t) = \int v(t')dt'$$

となる. 不定積分を実行すると積分定数が出るが、それらは初速度 v_0 と初期位置 x_0 から決まる.

例題 4.1.1: 等加速度運動の公式

一定の加速度 a で 1 次元運動している物体がある。物体の速度 v(t) と位置 x(t) を求め,これまでに習った等加速度運動の公式と一致することを確認せよ。また,積分する際に現れる積分定数の物理的な意味を考えよ。

解

位置を微分すれば速度、速度を微分すれば加速度なので、その逆として

加速度を積分すれば速度、速度を積分すれば位置

が求まる.加速度が複雑な関数であれば積分するのは難しいが,等加速度運動やいくつかの運動については簡単に積分できる.

今,一定値 a の加速度で運動しているから,

$$v(t) = \int adt = at + C$$
 (C は積分定数)

である.ここで積分定数 C は,v(t)=at+C の式に t=0 を代入すると v(0)=C となることから, C は t=0 における速度,すなわち初速度 に対応することがわかる.そこで物理では C のことを v_0 と 書き,

$$v(t) = at + v_0$$

と表す.

位置はこの速度をさらに積分して

$$x(t) = \int v dt = \int (at + v_0) dt = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + C'$$
 (C'は積分定数)

となる. C' は C と同様に考えると初期位置(t=0 での位置)であることがわかる. 物理ではこれを x_0 と書く. よって

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

と表される. これら v(t),x(t) の式は高校物理で学ぶ等加速度運動の公式に一致している(各自教科書を確認して下さい).

1.4.2 3次元のとき

加速度が $\mathbf{a}(t) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t))$ であるとき,

$$\mathbf{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t)) = \left(\int a_x(t')dt', \int a_y(t')dt', \int a_z(t')dt' \right)$$
$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = \left(\int v_x(t')dt', \int v_y(t')dt', \int v_z(t')dt' \right)$$

この場合も不定積分から積分定数が出るので、初速度 v_0 と初期位置 r_0 を与えて値を決める.

例題 4.2.1 ある物体が加速度が

$$a(t) = (18t, -\omega^2 A \sin \omega t, 4e^{-2t})$$
 (ω, A は定数)

で与えられるような運動をしているとき、物体の速度 $m{v}(t)$ と位置 $m{r}(t)$ を求めよ、ただし初速度 $m{v}_0$ と 初期位置 $m{r}_0$ はそれぞれ

$$v_0 = (4, \omega A, -2), \quad r_0 = (2, 1, -1)$$

であるとする.

解

まず速度から求める. 速度の x 成分は

$$v_x(t) = \int a_x(t')dt' = \int 18t'dt' = 9t^2 + C_1$$
 (C₁は積分定数)

であり、初速度のx成分は4なのでそれに合うようにするためには

$$v_r(t=0) = 9 \cdot 0^2 + C_1 = 4$$
 : $C_1 = 4$

こうして

$$v_x(t) = 9t^2 + 4$$

を得る. y,z 成分も同様にして加速度の y,z 成分である a_y,a_z を積分し、初速度の y,z 成分がそれぞれ ωA と -2 であることを使うと、

$$v_y(t) = \omega A \cos \omega t, \quad v_z(t) = -2e^{-2t}$$

を得る. まとめてベクトルの形に書くと

$$\boldsymbol{v}(t) = \left(9t^2 + 4, \omega A \cos \omega t, -2e^{-2t}\right)$$

となる.

位置を求めるには今求めた v_x, v_y, v_z を積分して、初期位置の情報を使って積分定数を決めればよい、x 成分だけやってみると

$$x(t) = \int v_x(t')dt' = \int (9t'^2 + 4)dt' = 3t^3 + 4t + C_2$$
 (C₂は積分定数)

であり、 $r_0 = (2,1,-1)$ から初期位置の x 座標は 2 なので

$$x(t=0) = 3 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0 + C_2 = 2, \quad \therefore C_2 = 2$$

のように積分定数の値が決まる. y,z についても同様にして,

$$r(t) = (3t^3 + 4t + 2, A\sin\omega t + 1, e^{-2t} - 2)$$

のように求まる.

1.5 落体の運動(1次元)

等加速度運動の例として、落体の運動について考える。空気抵抗は無視する。重力加速度の大きさは g とする.

1.5.1 自由落下

鉛直下向きに x 軸を取り、物体をそれに沿って自由落下させる。物体の初期位置を x=0 とすると、時刻 t での物体の速度と位置はそれぞれ

$$v(t) = gt, \quad x(t) = \frac{1}{2}gt^2$$
 (1.5.1)

となる(各自示してみよ).

1.5.2 鉛直投げ上げ

鉛直上向きに x 軸を取り、物体を初速 v_0 で投げ上げる.物体の初期位置を $x=x_0$ とすると、時刻 t での物体の速度と位置はそれぞれ

$$v(t) = v_0 - gt, \quad x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$
 (1.5.2)

となる(各自示してみよ).

1.6 落体の運動(2次元)

水平投射や斜方投射は、力がベクトル的であることから水平方向の運動と鉛直方向の運動に分解して考えることができる。以下、水平方向で物体が進む方向にx軸、鉛直上向きにy軸を取る。

1.6.1 水平投射

- x 軸方向には力が働かない ⇒ 等速直線運動
- y 軸方向には重力のみ, y 軸方向には初速がゼロ \Rightarrow 自由落下と物理的には同じ

1.6.2 斜方投射

- x 軸方向には力が働かない ⇒ 等速直線運動
- y 軸方向には重力のみ, y 軸方向に何らかの初速で投げ上げられたのと同じ
 - ⇒ 鉛直投げ上げと物理的には同じ

第2章 空気抵抗を受ける落体の運動

2.1 講義内容のまとめ

- 速度に比例する抵抗力が加わった場合の落体の運動について考える
- 変数分離法を用いて速度を計算できる

2.2 空気抵抗を受ける落体

2.2.1 復習:一定の加速度の下での運動(1次元)

加速度を a とし、一定であるとする. 初速を v_0 、初期位置を x_0 とすると速度は

$$v(t) = \int adt = at + C_1 \quad (C_1 は積分定数)$$
 (2.2.1)

で、初期条件より t=0 で $v=v_0$ なので、 $C_1=v_0$. よって

$$v(t) = v_0 + at. (2.2.2)$$

さらに位置は

$$x(t) = \int vdt = \int (v_0 + at)dt = v_0t + \frac{1}{2}at^2 + C_2 \quad (C_2$$
は積分定数) (2.2.3)

で、同じく初期条件より t=0 で $x=x_0$ なので $C_2=x_0$. よって

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2. (2.2.4)$$

例題 2.1.1: まさつのない斜面を滑る物体の運動

水平面と角 θ をなし、まさつのない斜面を滑る物体の運動について考える。重力加速度の大きさを g とし、斜面に沿って下向きに x 軸を取るとき、

- (1) 物体が斜面から受ける垂直抗力の大きさを求めよ.ただし物体の質量は m とする. (略解: $mq\cos\theta$)
- (2) 物体の斜面方向の加速度 a(t) を求めよ. (略解: $g\sin\theta$)
- (3) 物体の斜面方向の速度 v(t) を積分を用いて求めよ、ただし t=0 で v=0 とする、また a-t グラフと v(t) の関係を説明せよ、(略解: $v(t)=g\sin\theta\cdot t$)
- (4) 物体の斜面方向の位置 x(t) を積分を用いて求めよ. ただし t=0 で $x=x_0$ とする. また v-t グラフと x(t) の関係を説明せよ. (略解: $x(t)=x_0+\frac{1}{2}g\sin\theta\cdot t^2$)

2.2.2 速度に比例する抵抗力を受ける落体の運動(1次元)

雨滴の運動などからわかるように、物体は落下する際に空気抵抗を受ける. 速度があまり大きくない場合は、空気抵抗は速度に比例する. よって運動方程式は

$$ma = mg - kv (2.2.5)$$

となる. この式から, 物体の速度 v や位置 x を求めたい.

→ 変数分離法を使うと解けることが知られている.

変数分離法

次のタイプの微分方程式を考える:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y). (2.2.6)$$

両辺を g(y) で割って、x で積分すると

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x) (2.2.7)$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} dx = \int f(x) dx \tag{2.2.8}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \tag{2.2.9}$$

となり、左辺はyのみの関数をyで積分、右辺はxのみの関数をxで積分できる形になっており、当初の微分方程式に比べるとかなり見通しがよい。なお両辺とも不定積分なので積分定数が出るが、任意の定数なのでどちらか一つにまとめて付けておけばよい。

例題 2.2.1:変数分離法の練習

以下の微分方程式を変数分離法で解け、ただし、いずれも条件として x=0 で y=1 が与えられている。

(1)
$$\frac{dy}{dx} = 2y$$
 (2) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ (3) $\frac{dy}{dx} = xy$ (8) $\frac{dy}{dx} = xy$ (8) $\frac{dy}{dx} = xy$ (9) $\frac{dy}{dx} = xy$ (1) $\frac{dy}{dx} = xy$ (2) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^2$ (3) $\frac{dy}{dx} = xy$

再び、空気抵抗を受ける落下運動について考える.式 (2.2.5) は $a=\frac{dv}{dt}$ を使って書き換えると

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} \left(v - \frac{mg}{k} \right) \tag{2.2.10}$$

なので、変数分離法が使える形になっている.両辺を $v-\frac{mg}{k}$ で割って t で積分すると $\ln = \log_e$ を用 いて

$$\int \frac{dv}{v - \frac{mg}{k}} = -\int \frac{k}{m} dt \tag{2.2.11}$$

$$\Rightarrow \ln \left| v - \frac{mg}{k} \right| = -\frac{k}{m}t + C \quad (C は積分定数)$$

$$\Rightarrow \left| v - \frac{mg}{k} \right| = e^{-\frac{k}{m}t + C} = e^{C} \cdot e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$\Rightarrow v - \frac{mg}{k} = \pm e^{C} \cdot e^{-\frac{k}{m}t} = A \cdot e^{-\frac{k}{m}t} \quad (A = \pm e^{C}),$$

$$(2.2.12)$$

$$\Rightarrow \left| v - \frac{mg}{k} \right| = e^{-\frac{k}{m}t + C} = e^C \cdot e^{-\frac{k}{m}t} \tag{2.2.13}$$

$$\Rightarrow v - \frac{mg}{k} = \pm e^C \cdot e^{-\frac{k}{m}t} = A \cdot e^{-\frac{k}{m}t} \quad (A = \pm e^C), \tag{2.2.14}$$

と計算できる. よって

$$v = \frac{mg}{k} + Ae^{-\frac{k}{m}t} (2.2.15)$$

となる.ここで A は任意定数である(なぜなら $A=\pm e^C$ において $-\infty < C < \infty$ である).計算途中 で使った $\ln = \log_e$ は自然対数という.

初期条件として t=0 で v=0 という状況を考えると,

$$0 = \frac{mg}{k} + Ae^{-\frac{k}{m} \cdot 0} = \frac{mg}{k} + A, \quad \therefore A = -\frac{mg}{k}$$
 (2.2.16)

と決まり, 最終的に

$$v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) \tag{2.2.17}$$

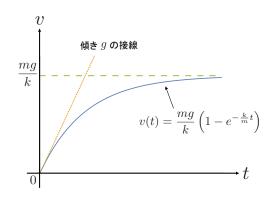
と求まる.

例題 2.2.2: 空気抵抗を受ける落体の運動

式 (2.2.17) などを使い,以下の問いに答えよ.

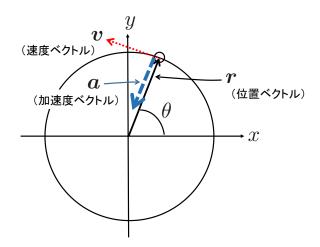
- (1) 終端速度 $(t \to \infty$ での速度) を求めよ.
- (2) t=0 での加速度を求めよ.
- (3) v-t グラフを書け.

(略解) (1)
$$\frac{mg}{k}$$
 (2) g (3)



第3章 等速円運動と単振動

3.1 等速円運動



図のような半径 r, 速さ v が一定の運動を考える. 重要な物理量として, 角速度 ω がある.

3.1.1 角速度

• 角速度 = 角度の時間変化率 = $\frac{$ 角度の変化 $}{掛かった時間}$ 数式での定義は、物体の位置ベクトルがx軸となす角を θ として 1

$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}.\tag{3.1.2}$$

• 速さv, 加速度の大きさa, 半径rとは,

$$v = r\omega, \quad a = r\omega^2 \tag{3.1.3}$$

の関係にある.

• 周期 T とは, 角速度の定義から

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{3.1.4}$$

の関係にある.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \tag{3.1.1}$$

のように、微分で定義する.

¹角速度が一定でない、より一般の円運動では

3.1.2 等速円運動の位置ベクトル・速度ベクトル・加速度ベクトル

2次元平面 (xy 平面)に限って考える。座標原点を中心とする角速度 ω ,半径 r の等速円運動で,t=0 のときに位置 (r,0) にいた場合,時刻 t での物体の位置・速度・加速度はそれぞれ

$$\mathbf{r}(t) = (r\cos\omega t, \ r\sin\omega t), \tag{3.1.5}$$

$$\mathbf{v}(t) = (-r\omega\sin\omega t, r\omega\cos\omega t), \tag{3.1.6}$$

$$\mathbf{a}(t) = (-r\omega^2 \cos \omega t, -r\omega^2 \sin \omega t), \tag{3.1.7}$$

となる(各自示してみよ). また、それぞれの方向について

- $v \perp r \Rightarrow v$ は円軌道に接する方向,
- $a \propto -r \Rightarrow a$ は円の中心を向く方向,

である(図を描けば明らかだが,数式からも示すことができる).

3.2 単振動

- 単振動 = 等速円運動の正射影
- 円運動の半径を A, 角速度を ω , 初期位相を α として, 時刻 t での物体の状態は以下の通り:
 - 位置: $x(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$
 - 速度: $v(t) = \dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t + \alpha)$
 - 加速度: $a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha)$
- 加速度 a(t) と位置 x(t) との間に

$$a(t) = -\omega^2 x(t) \tag{3.2.1}$$

という関係が成り立つ

⇒ 加速度が速度と位置を決めるので、(3.2.1) と同じタイプの運動方程式、つまり

$$(加速度) = (-1) \times (正の数) \times (位置)$$

で表される運動があれば、その運動は単振動だと言える.

3.3 単振動タイプの微分方程式の解き方

3.3.1 実一般解の求め方

前節では単振動の位置 x(t) から単振動の微分方程式を作ったが、これは逆に言えば単振動タイプの微分方程式

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0 (3.3.1)$$

の解が

$$x(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$$
 (A, α は任意の実数) (3.3.2)

となることを意味する. 微分すれば速度も

$$v(t) = A\omega\cos(\omega t + \alpha) \tag{3.3.3}$$

と決まる. またこれを加法定理で展開すると

$$x(t) = A\cos\alpha\sin\omega t + A\sin\alpha\cos\omega t \tag{3.3.4}$$

となるから

$$C = A\cos\alpha, \quad D = A\sin\alpha$$
 (3.3.5)

と書き直せば

$$x(t) = C\sin\omega t + D\cos\omega t \tag{3.3.6}$$

となる. A, α が実数なので C, D ももちろん実数であるから (3.3.2) と (3.3.6) のことを**実一般解**という. C, D を使うと速度は

$$x(t) = C \sin \omega t + D \cos \omega t \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = C\omega \cos \omega t - D\omega \sin \omega t$$
 (3.3.7)

となることはすぐわかる。大学の力学の教科書には、 $A\sin(\omega t + \alpha)$ という形で実一般解が書いてあることが多い。これは「等速円運動の正射影」という単振動の定義から導かれる形だからだが、初期条件に合うように積分定数を求めるときにはこの形は少し計算が複雑になる。

3.3.2 初期条件の使い方

実際の問題に運動方程式を適用する場合,初期条件(初期位置や初速度)に合うように積分定数を決める必要がある。 実一般解で言うと C,D や A,α などを初期条件に合うように決めるわけである. 2

例えば初期条件として

初期位置
$$x(t=0) = x_0$$
, 初速度 $v(t=0) = v_0$

が与えられていた場合に, 実一般解

$$x(t) = C\sin\omega t + D\cos\omega t \tag{3.3.8}$$

をこれに合うように調整してみる.まず t=0 において $x=x_0$ でなければならないわけだから実一般解に t=0 を代入して

$$x(t=0) = C\sin(\omega \cdot 0) + D\cos(\omega \cdot 0) = C \cdot 0 + D \cdot 1 = D = x_0$$
(3.3.9)

 $^{^2}$ 単振動タイプの微分方程式が 2 階であることに対応して積分定数は C,D,もしくは A,α のように 2 つある.対する初期条件も初期位置と初速度のように 2 つあるから,条件を満足するように C,D もしくは A,α を設定することは必ずできる.

より, $D=x_0$ でなければならないことがわかる.初速度については,まず位置の実一般解を微分して速度

$$v(t) = C\omega\cos\omega t - D\omega\sin\omega t \tag{3.3.10}$$

を求めておき, t=0 をここへ代入すると

$$v(t=0) = C\omega\cos\omega \cdot 0 - D\omega\sin\omega \cdot 0 = C\omega \cdot 1 - D\omega \cdot 0 = C\omega = v_0 \tag{3.3.11}$$

なので $C = v_0/\omega$ だとわかる. よって初期条件を満たす解は

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t, \quad v(t) = v_0 \cos \omega t - x_0 \omega \sin \omega t$$
 (3.3.12)

と決まる.3 先にも述べたように、初期条件を定めるにはこの

$$x(t) = C\sin\omega t + D\cos\omega t \tag{3.3.13}$$

というタイプの実一般解を使うと計算し易いことが多い. しかしこのタイプはグラフを描きにくい. 実際, グラフにするときは

$$x(t) = A\sin(\omega t + \alpha) \tag{3.3.14}$$

というタイプに書き直した方がよい(というかそうしないと描けない)。 例えば (3.3.12) を書き直して みると

$$x(t) = \sqrt{\frac{v_0^2}{\omega^2} + x_0^2} \sin(\omega t + \alpha),$$
 (3.3.15)

$$\left(ただし \alpha は \sin \alpha = \frac{x_0}{\sqrt{\frac{v_0^2}{\omega^2} + x_0^2}}, \cos \alpha = \frac{\frac{v_0}{\omega}}{\sqrt{\frac{v_0^2}{\omega^2} + x_0^2}} \right)$$
 (3.3.16)

となる. これにより、この単振動の振幅が

$$\sqrt{\frac{v_0^2}{\omega^2} + x_0^2} \tag{3.3.17}$$

であり,

$$\sqrt{\frac{v_0^2}{\omega^2} + x_0^2} \sin \omega t \tag{3.3.18}$$

のグラフを左へ α だけずらしたグラフになることがわかる.

例題 3.2.1: 単振動タイプの微分方程式の解法

以下の単振動タイプの微分方程式を解け.

³講義では $v_0 = 0$ という例を紹介した.

3.4. 単振動の例 23

(1) $\frac{d^2x}{dt^2}=-2x$ (実一般解を求めよ) (略解: $x(t)=A\sin(\sqrt{2}t+\alpha)$ または $x(t)=C\cos\sqrt{2}t+D\sin\sqrt{2}t$. ここで, A,α,C,D はいずれも任意の実数)

(2) $\frac{d^2x}{dt^2}=-3x$ を, t=0 で x=-2, $\frac{dx}{dt}=2\sqrt{3}$ という初期条件の下で解き, $A\sin(\omega t+\alpha)$, $C\cos\omega t+D\sin\omega t$ の 2 つの形で表せ.

(略解:
$$x(t) = -2\cos\sqrt{3}t + 2\sin\sqrt{3}t$$
, $x(t) = 2\sqrt{2}\sin(\sqrt{3}t - \frac{\pi}{4})$)

3.4 単振動の例

3.4.1 ばねに付けられたおもりの振動

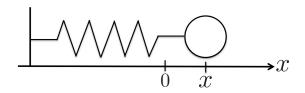


図 3.1: 単振動するおもり

図 6.1 のように、ばね定数 k のばねを摩擦のない水平面に置いて一端を固定し、反対の端に質量 m のおもりを付けるとき、ばねの自然長からの伸びが x なら質点の運動方程式は

$$ma = -kx \implies a = -\frac{k}{m}x$$
 (3.4.1)

となる. これと $a = -\omega^2 x$ を見比べると,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3.4.2}$$

と考えれば、おもりの運動方程式が単振動タイプであることがわかる。なお ω は等速円運動の角速度、単振動では角振動数なので、周期 T とは

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Leftrightarrow \quad \omega T = 2\pi \tag{3.4.3}$$

という関係にある. 周期 T の逆数として定義される振動数

$$f = \frac{1}{T} \tag{3.4.4}$$

との間に成り立つ式

$$\omega = 2\pi f \tag{3.4.5}$$

も思い出しておくこと.

3.4.2 単振り子

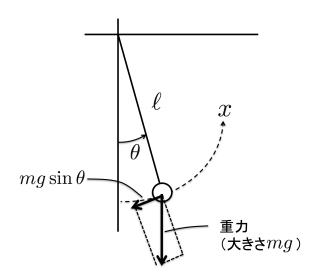


図 3.2: 単振り子

図 3.2 のように、長さ ℓ の軽くて伸び縮みしないひもの先に質量 m のおもりをつけて、微小な振動を与える。おもりの軌道方向を x 軸に取ると、鉛直方向とひものなす角 θ とは $x=\ell\theta$ の関係がある。この θ を用いると x 方向(軌道の接線方向)に働く力は $-mg\sin\theta$ なので運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\ell\sin\theta\tag{3.4.6}$$

となる. ここへ $x = \ell\theta$ を代入し、さらに θ が十分小さいことを用いると

$$m\frac{d^2}{dt^2}(\ell\theta) = -mg\sin\theta \quad \Rightarrow \quad m\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} \approx -mg\theta$$
 (3.4.7)

となり、これより近似的に

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\theta\tag{3.4.8}$$

を得るが、これは角振動数を $\sqrt{\frac{g}{\ell}}$ の単振動タイプの運動方程式になっている。周期は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \tag{3.4.9}$$

で、この値はおもりの質量によらない.これを振り子の等時性という.

ここでは θ についての運動方程式を解いたが、 $x=\ell\theta$ なので、x についても単振動的な動き、すなわち \sin や \cos で表される運動をする.

3.4.3 電気振動

電気回路において、図 3.3 のようにな電気容量 C [F] のコンデンサーとインダクタンス L [H] のコイルのみを繋いだものを考える。あらかじめ充電しておいたコンデンサーを繋ぐと、蓄えられていた電荷

3.4. 単振動の例 25

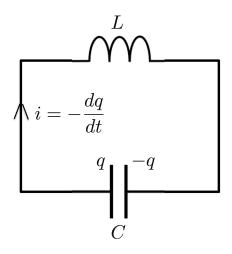


図 3.3: 振動回路

が放電され、コイルに電流が流れる.すると電磁誘導が起き、コイルに誘導起電力(逆起電力)が生じる.放電が進んで回路を流れる電流量が減少すると、その変化を妨げるように誘導起電力は誘導電流を流す.すなわち回路を電流が流れ続け、コンデンサーは最初に充電したのと逆符号の電荷で充電される.充電できる量は最初に充電した値で決まっているので(エネルギー保存則から当初に充電したときに蓄えられたエネルギーを超えて充電できることはない)、充電が完了すると再び放電を始める.これを繰り返し、回路内を電流が振動的に流れ続けるのが電気振動である.4

この様子を数式で表す.時刻 t においてコンデンサーに蓄えられている電気量を q とすると,コンデンサーの極板間の電位は

$$V_C = \frac{q}{C} \tag{3.4.10}$$

である. また, 時刻 t で回路を流れている電流を i とすると, コイルには

$$V_L = -L\frac{di}{dt} (3.4.11)$$

だけの誘導起電力が発生している.回路内には抵抗がないので電圧降下はない.よってキルヒホッフの 法則より,回路には

$$V_C + V_L = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{C} - L\frac{di}{dt} = 0 \tag{3.4.12}$$

が成立する. ここで,回路に流れる電流は,コンデンサーに蓄えられていた電荷が流れ出したものであることに注意すると.

$$i = -\frac{dq}{dt} \tag{3.4.13}$$

が成り立つ. これを (3.4.12) へ代入すると

$$\frac{q}{C} - L\frac{d}{dt}\left(-\frac{dq}{dt}\right) = \frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0 \tag{3.4.14}$$

⁴多少なりとも導線にも抵抗はあるので、永遠に電流が流れ続けることはない.

となるので,

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{1}{LC}q\tag{3.4.15}$$

であることがわかる.これは $\sqrt{\frac{1}{LC}}$ を角振動数とするような単振動を表す微分方程式になっている.これより,電気量 q は周期

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \tag{3.4.16}$$

で単振動的に変化することがわかる. これを電気振動という.

第4章 2階線形微分方程式の解法

4.1 定数係数の2階線形常微分方程式

ばね定数 k のばねに質量 m のおもりを振動させると単振動するが、その運動方程式は

$$ma = -kx (4.1.1)$$

という形をしている.ここに速度に比例する空気抵抗 $-\tilde{k}v$ までとりいれれば、運動方程式は

$$ma = -kx - \tilde{k}v \tag{4.1.2}$$

となるだろう. ここで $a=\frac{d^2x}{dt^2},\quad v=\frac{dx}{dt}$ であることを思い出すと,この運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \tilde{k}\frac{dx}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\tilde{k}}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{4.1.3}$$

となる. このタイプの運動方程式は自然界の様々な場面で見られる重要なものであり、解き方もよく知られている.

4.1.1 微分方程式の形

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 3\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = 0 (4.1.4)$$

のように、一般的に p,q を定数とし

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + p\frac{dx(t)}{dt} + qx(t) = 0 (4.1.5)$$

というタイプの微分方程式を定数係数の2階線形斉次常微分方程式という、「斉次」とは、微分方程式の右辺にtの関数F(t)がないことを指す、つまり非斉次なら

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + p\frac{dx(t)}{dt} + qx(t) = F(t)$$
 (4.1.6)

となる. もちろん F(t) が入ると解くのは面倒になったり,F(t) の形によっては手では解けないこともあり得る. ちなみに例えば振り子に周期的な外力を加えて振幅を増幅させているときの $\cos t F(t) = F_0 \sin \tilde{\omega} t$ としたものになり,これは解ける例として有名な「強制振動」と呼ばれる現象である.

式 4.1.5 の微分部分をまとめて

$$\mathcal{L}x(t) = \left(\frac{d^2}{dt^2} + p\frac{d}{dt} + q\right)x(t) = 0 \tag{4.1.7}$$

のように \mathcal{L} という記号で表すことがある. この \mathcal{L} のことは微分演算子という.

4.1.2 独立な解と線形結合

この微分方程式を解くと独立な解が 2 つ見つかるが,それらを線形結合したものもまた,微分方程式の解になるという特徴がある.実際,この方程式の独立な解 $x_1(t), x_2(t)$ が見つかったとすると,それらは上の微分方程式を満たすのだから当然

$$\mathcal{L}x_1(t) = 0$$
 かつ $\mathcal{L}x_2(t) = 0$ (4.1.8)

を満たす. これを使うと $x_1(t)$ と $x_2(t)$ の線形結合 $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ も

$$\mathcal{L}(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) = \alpha \mathcal{L}x_1(t) + \beta \mathcal{L}x_2(t) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$
(4.1.9)

のように、微分方程式 (4.1.7) を満たす。ここで、 α,β は定数なので微分演算子 $\mathcal L$ の外に出せること、例えば

$$\frac{d}{dt}(\alpha x_1(t)) = \alpha \frac{dx_1(t)}{dt} \tag{4.1.10}$$

などのようにできることを使った.

4.2 復習:単振動タイプの微分方程式

第4回の宿題にあったように、単振動タイプの微分方程式の解は、より一般的には複素一般解と呼ばれるものになる。その求め方は定数係数の2階線形常微分方程式を解く方法と同じなので、宿題の解説を兼ねてここで例として上げる。以下では ω は実数であることを暗に仮定する。なお、微分方程式を解く上ではこの仮定は必要ないが、単振動に話を限る分には ω は実数しか現れない。

4.2.1 単振動タイプの微分方程式の複素一般解

まず単振動タイプの微分方程式

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0 (4.2.1)$$

の解が、定数 λ を使って

$$x(t) = e^{\lambda t} \tag{4.2.2}$$

と書けるのではないかと**仮定する**(こういったうまい仮定の置き方には定石がないので,残念ながら覚えておくしかない). この仮定した解が微分方程式 (4.2.1) を満たすなら,代入して等号が成り立つはずだから

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = \lambda^2 e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = (\lambda^2 + \omega^2) e^{\lambda t} = 0$$
 (4.2.3)

が任意の時刻 t で成立しなければならない. これより

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm i\omega \tag{4.2.4}$$

である. こうして

$$e^{i\omega t}, \quad e^{-i\omega t}$$
 (4.2.5)

の二つが解になっていることがわかる. ここで λ の式 $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ を特性方程式という.

これら二つの解がわかると、実はこれらの線形結合(一次結合)も解になっていることがわかる.

実際, α , β を任意の複素数として

$$x(t) = \alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t} \tag{4.2.6}$$

を2回微分してみると

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \left(\alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t}\right) \tag{4.2.7}$$

$$= \alpha \frac{d^2}{dt^2} \left(e^{i\omega t} \right) + \beta \frac{d^2}{dt^2} \left(e^{-i\omega t} \right) \tag{4.2.8}$$

$$= \alpha(-\omega^2 e^{i\omega t}) + \beta(-\omega^2 e^{-i\omega t}) = -\omega^2 \left(\alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t}\right)$$
(4.2.9)

となり、単振動タイプの微分方程式を満たしていることはすぐに確かめられる.

この解は α , β が複素数なので**複素一般解**というが,先にやった実一般解は,複素一般解に含まれている。なぜならオイラーの式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{4.2.10}$$

を使えば

$$x(t) = \alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t} \tag{4.2.11}$$

$$= \alpha(\cos\omega t + i\sin\omega t) + \beta(\cos\omega t - i\sin\omega t) \tag{4.2.12}$$

$$= i(\alpha - \beta)\sin\omega t + (\alpha + \beta)\cos\omega t \tag{4.2.13}$$

となるから,1

$$i(\alpha - \beta), \quad \alpha + \beta$$
 (4.2.14)

の二つが実数なら、これは実一般解そのものである.

なお、これらが実数であるためには α と β が互いに複素共役であればよい. つまり a,b を実数として

$$\alpha = a + bi, \ \beta = a - bi \Rightarrow i(\alpha - \beta) = -2b, \ \alpha + \beta = 2a$$
 (4.2.15)

となるからである. 実一般解ではこの a,b を C=-2b, D=2a を満たす C,D で表していたわけである.

単振動のような、現実に起こる現象の場合は位置や速度といった物理量はもちろん実数になる.そのため最終的には実数解のみが残るが、複素数に拡張することで指数関数を活用することができ、問題が解き易くなることがよくある.特に電磁気学などではそうした計算方法を用いる.また、ミクロの世界を扱うための理論である量子力学では、観測量は実数だが、それを計算するために必要となる波動関数という量は複素数の範囲で考える必要がある.こういった理由から、複素数で計算することにも慣れておいた方がよい.

 $^{{}^{1}}e^{-i\omega t} = \cos(-\omega t) + i\sin(-\omega t) = \cos\omega t - i\sin\omega t \quad (\because \sin(-\theta) = -\sin\theta, \cos(-\theta) = \cos\theta)$

例題 2.1.1: 単振動タイプの微分方程式の複素一般解

以下の微分方程式の複素一般解を求めよ.

(1)
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -16x$$

 (略解: $x(t) = \alpha e^{4it} + \beta e^{-4it}$ (α, β は任意の複素数))

(2)
$$\frac{dp}{dt} = -kx$$
, $\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}$ $(x(t)$ の複素一般解を求めよ. k, m は実数の定数である.)
 (略解: $x(t) = \alpha e^{i\sqrt{k/m}} t + \beta e^{-i\sqrt{k/m}} t$ $(\alpha, \beta$ は任意の複素数))

4.3 応用:減衰振動

ここまでの単振動の問題では摩擦を無視しているので、あまり現実ではない. 摩擦にもいろんな種類があるが、ここでは一番扱い易い空気抵抗からくる摩擦が入った場合の単振動について考える. 落体の問題でやったように、その場合は摩擦力が速度に比例する. よって運動方程式は

$$ma = -kx - \tilde{k}v \quad (\tilde{k}は正の定数) \tag{4.3.1}$$

となる. 左辺へ全て移項して書き直すとこの式は

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = 0 \qquad \left(\frac{\tilde{k}}{m} = 2\gamma, \ \frac{k}{m} = \omega^2 \, \xi \,$$
 おいた
$$\right) \tag{4.3.2}$$

となる. これは前節の最後に紹介した

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + p\frac{dx(t)}{dt} + qx(t) = 0 (4.3.3)$$

というタイプなので**定数係数の斉次 2 階線形常微分方程式**である.以下では $2\gamma \frac{dx(t)}{dt}$ の項を摩擦項と呼ぶことにする.場合分けをしながら一般的な解について説明するが,全ての場合について理解する必要はない.全員に必ずマスターして欲しいのは,

- $\gamma = 0$ で、摩擦のない単振動に帰着する場合(すでに学習済み)
- $\gamma > 0$ かつ $\gamma^2 \omega^2 < 0$ で、減衰しながら振動する場合

の2つである.

4.3. 応用:減衰振動 31

4.3.1 摩擦項入りの単振動タイプの微分方程式の解き方

(4.3.2) を解くときも、解を $e^{\lambda t}$ と仮定すればよい. これを代入してみると

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}) = \lambda e^{\lambda t}, \quad \frac{d^2}{dt^2}(e^{\lambda t}) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$
(4.3.4)

なので

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = \left(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2\right)e^{\lambda t} = 0 \tag{4.3.5}$$

から特性方程式

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0 \tag{4.3.6}$$

を得る、2次方程式の解の公式を使えばこの λ は

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \tag{4.3.7}$$

のように求まる. よって独立な解として

$$e^{(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2})t}, \quad e^{(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2})t},$$
 (4.3.8)

を得るが、この解の振舞いは γ の正負と、 $\gamma^2 - \omega^2$ の値によって全く異なるので以下で場合分けして考える.

γ の物理的役割

まず γ について場合分けして考えよう.

(1) γ が正のとき

今考えているのは単振動に摩擦が入った場合なので $\gamma=\frac{\tilde{k}}{2m}>0$ であり、このケースに当たる.このとき解にある $e^{-\gamma t}$ という部分は

$$e^{-\gamma t} \to 0 \quad (t \to \infty \ \mathcal{O} \ \mathcal{E})$$
 (4.3.9)

なので、時間がたつにつれて解の値を指数関数的に小さくする効果を担っている. これは摩擦力に よって振動が減衰し、やがて止まってしまう状況を表している.

(2) γ が負のとき

今考えているケースでは $\gamma < 0$ ということはないが、数学的にはあり得るので、このケースも考えてみると

$$-\gamma = -\frac{\tilde{k}}{2m} > 0 \tag{4.3.10}$$

だから

$$e^{-\gamma t} \to \infty \quad (t \to \infty \ \mathcal{O} \ \mathcal{E})$$
 (4.3.11)

となって、時間とともに解が発散してしまうことがわかる.上で述べたように摩擦力が働くときは $\gamma > 0$ なので、このケースになるようなことは考えなくてよい.²

(3) $\gamma = 0$ のとき

このとき,最初の(4.3.2)に戻ると

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2x(t) = 0 (4.3.12)$$

となって、これは単振動タイプの微分方程式になる.よって解き方は複素一般解の求め方でで説明 した通りである.³

$\sqrt{\gamma^2-\omega^2}$ の物理的役割

先に述べたように、物理的には $\gamma > 0$ のケースが摩擦力の働く場合に対応するので、**以降はずっと** $\gamma > 0$ だとする. その上で $\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$ について考えよう. ルートの中身が正、負、ゼロのどれを取るかで実数、純虚数、ゼロの3 通りを取りうるので、解の振舞いが変わってくる.

(1) $\gamma^2 - \omega^2$ が負のとき

これは $\gamma < \omega$ というときに起こるので、抵抗力が弱い場合に当たる. このとき

$$\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} = \sqrt{-(\omega^2 - \gamma^2)} = i\Omega$$
 ($\Omega = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$, Ω は実数) (4.3.14)

という実数 Ω を導入すると、特性方程式を解いて得られていた解は

$$e^{(-\gamma+i\Omega)t}, \quad e^{(-\gamma-i\Omega)t},$$
 (4.3.15)

の二つということになるので、これらを線形結合して(複素)一般解は

$$x(t) = \alpha e^{(-\gamma + i\Omega)t} + \beta e^{(-\gamma - i\Omega)t}$$
 (α, β は任意の複素数) (4.3.16)

$$= e^{-\gamma t} \left(\alpha e^{i\Omega t} + \beta e^{-i\Omega t} \right) \tag{4.3.17}$$

となる. 実一般解なら

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left(C \sin \Omega t + D \cos \Omega t \right) \tag{4.3.18}$$

$$= Ae^{-\gamma t}\sin(\Omega t + \delta) \tag{4.3.19}$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + qx(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} - \kappa^2 x(t) = 0$$
(4.3.13)

なので二つの独立な解 $e^{\kappa t}$, $e^{-\kappa t}$ がすぐ見つかる.実一般解は $x(t)=Ce^{\kappa t}+De^{-\kappa t}$ のように指数関数の線形結合となる.これは量子力学ではよく現れる解なので(例えばトンネル効果),特に物理科の学生なら知っておいて損はない.

²もし例を思い付いた人がいたら教えて欲しい.

 $^{^3}$ ただし ω^2 が負になるケース,つまり ω が純虚数になるケースはまだ扱っていない.このときは κ を実数として $\omega^2=-\kappa^2$ とおくと

4.3. 応用:減衰振動 33

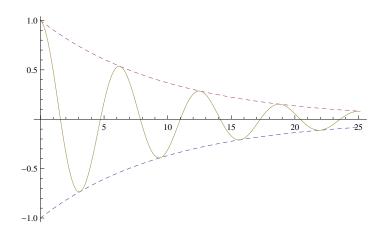


図 4.1: 減衰振動. 例として $e^{-t/10}\cos t$ を t=0 から $t=8\pi$ までプロットした.

となる. (4.3.19) を見るとわかりやすいが,これは \sin 関数の振幅部分に $e^{-\gamma t}$ がついた解である.この項の効果によって振幅が時間とともに小さくなっていく.つまり図1のように単振動的に周期運動をしながら,だんだんその振幅が小さくなって,やがて止まってしまうことを表す.もちろんこれは摩擦の効果である.このタイプの振動を減衰振動という.

例題 3.1.1: 減衰振動になるタイプの微分方程式定数係数の 2 階常微分方程式

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 10x(t) = 0$$

を解いて実一般解を求めよ.また初期条件 x(0)=0, $\dot{x}(0)=6$ に合う解を求め,x-t グラフの概形を書け.

(略解: 実一般解は $x(t) = e^{-t}(C\cos 3t + D\sin 3t)$, または $x(t) = Ae^{-t}\sin(3t + \alpha)$. 初期条件に合う解は $x(t) = 2e^{-t}\sin 3t$. グラフは省略する)

(2) $\gamma^2 - \omega^2$ が正のとき

これは $\gamma > \omega$ を意味するので、抵抗力が強い場合に当たる. このとき特性方程式の解について

$$\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} = \gamma_{\pm}(>0) \tag{4.3.20}$$

という正の数 γ_{\pm} を定義すると複素一般解は α, β を任意の複素数として

$$x(t) = \alpha e^{-\gamma_+ t} + \beta e^{-\gamma_- t} \tag{4.3.21}$$

と書ける. 実一般解は C,D を任意の実数として

$$x(t) = Ce^{-\gamma_{+}t} + De^{-\gamma_{-}t}$$
(4.3.22)

γ_± はどちらも正なので、解は必ず時間とともにゼロに収束していく.これは**摩擦力が強すぎて振動せずに止まってしまう**状態になっていると考えられる.この状態のことを**過減衰**という.

(3) $\gamma^2 - \omega^2$ がゼロのとき

これは特性方程式が重解 $e^{-\gamma t}$ しか持たないことを意味する. よって独立な解が 1 つしかないことになるが、今考えている方程式 (4.3.2) が 2 階の微分方程式であることと矛盾する. なぜなら、2 階の微分方程式は積分定数を必ず 2 つ持つはずだから、それに対応して独立な解も 2 つあるはずだからである. そこでこの場合は独立な解を別の方法で探さなければならない.

具体的には, またも仮定として解を

$$x(t) = u(t)e^{-\gamma t} \tag{4.3.23}$$

と置いてみて方程式 (4.3.2) に試しに代入してみる. すると $\frac{du}{dt}=u'(t)$ として

$$\frac{d}{dt}\left(u(t)e^{-\gamma t}\right) = \left(u'(t) - \gamma u(t)\right)e^{-\gamma t},\tag{4.3.24}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(u(t)e^{-\gamma t} \right) = \left(u''(t) - 2\gamma u'(t) + \gamma^2 u(t) \right) e^{-\gamma t} \tag{4.3.25}$$

より

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = \left\{ u''(t) - 2\gamma u'(t) + \gamma^2 u(t) + 2\gamma \left(u'(t) - \gamma u(t) \right) + \omega^2 u(t) \right\} e^{-\gamma t}
= \left\{ u''(t) + (-\gamma^2 + \omega^2)u(t) \right\} e^{-\gamma t}
= u''(t)e^{-\gamma t} = 0$$
(4.3.26)

を得る(なぜなら今は $\gamma^2 = \omega^2$ という場合を考えている). よって

$$u''(t) = 0$$
 \Rightarrow $u(t) = \alpha t + \beta (\alpha, \beta)$ は任意の複素数) (4.3.27)

のように u(t) が決まることがわかるから、複素一般解は

$$x(t) = (\alpha t + \beta)e^{-\gamma t},\tag{4.3.28}$$

実一般解は

$$x(t) = (at+b)e^{-\gamma t}$$
 (a,b) は任意の実数) (4.3.29)

となる.

この場合も明らかに $t\to\infty$ の極限で振動がゼロに近づく. 減衰振動と過減衰のちょうど境目の状態であることから,この状態は**臨界減衰**または**臨界制動**という. 減衰振動および過減衰と比べてこの臨界減衰が一番早く減衰するので,車のサスペンションや顕微鏡の除振台のような,振動を取り除くための装置に応用されている. つまり,摩擦力に関連する係数 γ をうまく調整して,装置に掛かる振動の角振動数 ω に等しくなるようにするのである.

第5章 仕事と運動エネルギー

5.1 はじめに

物理学には「物の理(ことわり)」を解き明かすという純粋科学的な側面だけでなく、実生活で役立つ「現世利益」的な側面もある。だからこそ物理学的手法は(好かれているかどうかは別として)理工系のあらゆる場面で顔を出す。

物理を「役立てる」という意味では、何と言っても物体が持つエネルギーや、そのエネルギーでできる仕事について計算できることが重要である。ここでは仕事、運動エネルギー、位置エネルギーおよび力学的エネルギーについて、微分積分を使って高校物理よりも一般的に定義し、理解を深める。

5.2 仕事

物体に力を加え、その方向に動かすことを「仕事をする」という。仕事をすることで物体にはエネルギーが蓄えられる。また、そのエネルギーを使って物体は仕事をする。つまり、力を加えながら何かを動かすことができる。

5.2.1 直線運動のとき

力と進む向きが一致しているとき

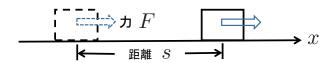


図 5.1: 力と運動の向きが一致している場合の仕事

直線的な運動する物体を考え,その運動方向に沿って x 軸を張る.図 5.1 のように物体に大きさ F [N] の力を加え,力の方向に距離 s [m] だけ動かす時,物体に加えた仕事は

$$W = Fs [J] (5.2.1)$$

であるという.

力と進む向きが一致していないとき

物体に加える力の方向が、物体の運動方向と異なる場合もある。例えば荷物に紐をつけてそれを肩にかけ、荷物を引きずる時は、力の方向は紐に沿う斜めの方向だが、物体は地面に平行に動く.

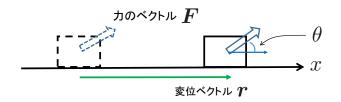


図 5.2: 力と運動の向きが角 θ をなす場合の仕事

このとき図 5.2 のように物体に加えた力を F, 物体の変位(ベクトル)を r とすると,動かした方向に加えられた力による仕事は

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = |\mathbf{F}||\mathbf{r}|\cos\theta \tag{5.2.2}$$

のように内積で与えられる. 動かした方向に加えた実質的な力が $|F|\cos\theta$ だからである. ここで θ は力 と変位がなす角である. $|F|\cos\theta$ は力 F のうち変位 r に沿う成分(射影)だから、定義を

$$W = (|\mathbf{F}|\cos\theta) \times |\mathbf{r}| \tag{5.2.3}$$

と書き換えればわかるように、仕事とは

(進ませるために実質的に役立っている力)×(進んだ距離)

のことである。図 5.2 の力のように進行方向に対して斜めに加えた力では、力全体が水平移動に使われているのではなく、水平方向成分である $|F|\cos\theta$ のみが、その運動に役立っている。

一方、鉛直成分である $|\mathbf{F}|\sin\theta$ は、荷物を床から少し浮かせるためには役立っているが、水平移動には関係していない。物体の運動状態を変化させることに役立っていないわけで、そのことが仕事の定義 $W=\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}=|\mathbf{F}||\mathbf{r}|\cos\theta$ にうまく取り入れられている。進行方向と直交する力は、仕事の定義式で $\theta=\frac{\pi}{2}$ にあたり、 $\cos\frac{\pi}{2}=0$ より W=0、つまり何の仕事もしないことになるのである。

 θ が $\frac{\pi}{2}$ を超えてくると、 $\cos\theta$ は負になる.つまり、進行方向とは反対側に働く力による仕事は負ということだが、進行方向とは反対側に働く力は、物体にブレーキをかけて遅くさせ、物体が持つエネルギーを減少させる働きをするから、これは自然な定義である.

また、物体にどれだけ力を加えても、物体が少しも動かなければ物体に加えた仕事はゼロと考える. 実際、定義に戻って考えれば変位 $|\mathbf{r}|=0$ だから W=0 であることはわかる。例えば、大きくて重たい岩を思い切り押しても、全然動かないことがあるだろう。このとき、押したら疲れるにも関わらず与えた仕事はゼロだということだ。なんだか不思議な気もするが、そもそも仕事とは何を見ているのかというと、

5.2. 仕事 37

物体に力を加えて状態を変化させたことで、その物体が周囲の環境に影響を及ぼせるように なったかどうか

だからである.

岩の例では、どれだけ頑張って岩を押しても、結局岩が動かないのであればその岩が周りの環境に影響を及ぼすことはない.「思い切り押したらその岩に力が溜め込まれて、あるとき勝手に動きだす」ということはないわけだ。逆に軽い石であれば、簡単に動かすことができる。例えばそれを投げて何かを壊すことができるかもしれない。投げる際に手で石に力を加えながら動かし、速度を与えるという仕事をすることで、その石は何かを壊すという「影響」を外部に及ぼすことができるようになるのだ。

このように、力学で扱われている「仕事」は日常生活で使われる仕事とは別物である。あくまで「外部に影響を及ぼせるようなエネルギーを蓄えたかどうか」のみを力学では見ているので注意してほしい。

5.2.2 仕事と仕事率

物体の変位ベクトルを時間で微分したものが速度ベクトルなので、力 F が時間に依存しなければ

$$\frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \tag{5.2.4}$$

となる. この $\frac{dW}{dt}$ を仕事率という. 仕事率は単位時間当たりの仕事なので単位は [J/s] であるが,これを [W] (ワット) と表す. これからわかるように,電力 [W] (ワット) が仕事率と同じ次元,電力量が仕事と同じ次元を持つ. 電力量の単位としては [Wh] (ワット時) がよく使われるが,これは電力に 1時間をかけたものである. 1時間は 60 秒 × 60 分 = 3600 秒なので,

$$1Wh = 1 J/s \times 3600 s = 3600 J = 3.6 \times 10^3 J$$
 (5.2.5)

である. また,

$$1kWh (キロワット時) = 1000Wh = 3.6 \times 10^6 J$$
 (5.2.6)

もよく使われる.

5.2.3 参考:曲線に沿う仕事と線積分(講義では扱わない)

一般には、物体の運動は直線になるとは限らない. 曲線に沿う場合の仕事の計算には線積分を用いる.

今,図 5.3 のように物体の運動の軌跡を表す曲線が t を媒介変数として $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ で表されているとき、物体の無限小変位ベクトルは

$$d\mathbf{r} = (dx, dy, dz) = dx\mathbf{e}_x + dy\mathbf{e}_y + dz\mathbf{e}_z \tag{5.2.7}$$

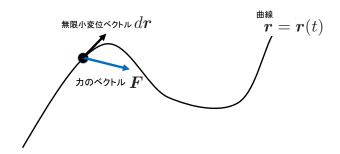


図 5.3: 曲線に沿う仕事と線積分

で与えられる. 位置ベクトルが $\mathbf{r}(t)$ で表される点で物体に加えた力を \mathbf{F} とすると, ごくごく小さい移動の間はこの力は一定であるとしてよいだろうから, 無限小の仕事は

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{5.2.8}$$

となるだろう. 曲線に沿って点 P から点 Q まで移動したときには、この無限小の仕事を全て足し集めれば全仕事になる. 具体的には

$$W = \int_{\mathbf{P}}^{\mathbf{Q}} dW = \int_{\mathbf{P}}^{\mathbf{Q}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$
$$= \int_{\mathbf{P}}^{\mathbf{Q}} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \int \left(F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} \right) dt$$
(5.2.9)

となる.ここで使った曲線に沿う積分を「線積分」という.高校で学習する積分は1変数関数 f(x) に対するものなので積分経路はx 軸に沿うものしかない(上の式で,dx に関する積分しかない).しかし物理量は位置座標 (x,y,z) のような,いくつかの変数に依存するのが一般的である.このため積分経路は直線になるとは限らず,空間中の曲線に沿う積分を計算する必要がある.線積分はそれにあたり,力学で使う場面はあまり多くないが,電磁気学では頻出の計算である.

5.3 仕事と運動エネルギー

5.3.1 仕事による運動エネルギーの変化

運動方程式 $m{m a}={m F}$ を用いると、仕事と運動エネルギーの関係を導くことができる.運動方程式で加速度 ${m a}$ を $\frac{d{m v}}{dt}$ と書くと

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \tag{5.3.1}$$

となるが、この両辺と速度 v の内積を取ると

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \tag{5.3.2}$$

を得る. この左辺を式変形すると

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v} = m\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{2}m\cdot2\left(\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) = \frac{1}{2}m\cdot\left(\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v}\right)$$
(5.3.3)

$$= \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(v^2)$$
 (5.3.4)

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) \tag{5.3.5}$$

となる. この時間微分されている量

$$\frac{1}{2}mv^2\tag{5.3.6}$$

を運動エネルギーという. 英語では kinetic energy なので $K=\frac{1}{2}mv^2$ のように K を用いて表すことが多い.

一方,式 (5.3.2) の右辺は仕事率に他ならないので

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{dW}{dt} \tag{5.3.7}$$

と書ける. よって式(5.3.2)は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{dW}{dt} \tag{5.3.8}$$

であるから、両辺を積分すると積分定数を C として

$$\frac{1}{2}mv^2 = W + C (5.3.9)$$

を得る.

ここで,最初に物体の速度が v_0 だったとすると,仕事を加える前,つまり仕事が W=0 のときに運動エネルギーは $\frac{1}{2}mv^2$ だったはずなので,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = 0 + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{5.3.10}$$

となる. よって

$$\frac{1}{2}mv^2 = W + \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{5.3.11}$$

$$\Leftrightarrow W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{5.3.12}$$

を得る.この式の右辺は,最初に持っていた運動エネルギー $\frac{1}{2}mv_0^2$ を仕事を加えられた後の運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ から引いたものだから,運動エネルギーの変化である.よって,

物体に加えた仕事の分だけ、物体の運動エネルギーは変化する

という関係が成り立つことがわかる. 最初に物体が静止していた場合は $v_0=0$ なので、特に

$$W = \frac{1}{2}mv^2 \quad (v_0 = 0 \text{ の場合}) \tag{5.3.13}$$

ということになる.

止まっている物体に力を加えて押せばその方向に加速し,運動エネルギーが増えるのは容易に想像がつく.減速させる方は少し想像しにくいかもしれないが,動いている物体に運動と逆向きの力を加えてブレーキをかければ減速する.式 (5.3.12) で $v < v_0$ のケースである.この場合,変位の方向と力の方向が反対だから負の仕事である.減速するから運動エネルギーも減少し, $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 < 0$ のように運動エネルギーの変化も負になる.この負の変化が負の仕事 W < 0 に対応している.

例:等加速度運動での運動エネルギーの変化と仕事

1次元運動に限って考え,図 5.4 のように物体の運動方向に沿って x 軸を張る.一定の力を加えると,物体は等加速度運動をする.力の大きさを F とし,物体が時間 t の間に距離 s だけ移動し,速度は v_0 から v に加速したとする.

このとき,物体の加速度は

$$a = \frac{速度の変化}{かかった時間} = \frac{v - v_0}{t} \tag{5.3.14}$$

であり、物体に加えられた仕事は

$$W = Fs \tag{5.3.15}$$

である. また移動距離 s は等加速度運動の単元で求めた位置 x, 速度 v を用いて

$$2as = v^2(t) - v_0^2 (5.3.16)$$

である. これは等加速度運動における時刻 t の物体の位置を表す

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 (5.3.17)$$

と速度の式

$$v(t) = v_0 + at (5.3.18)$$

を連立させて t を消去し, $s=x(t)-x_0$ を使えば得られる式である(時刻 t での位置 x(t) から最初の位置 x_0 を引いた $x(t)-x_0$ が移動距離 s であることに注意.ただし加速度が途中で変化して,行ったり来たりするようなシチュエーションでは単純な引き算では求まらない).

さて運動方程式 ma = F の両辺に s をかけると

$$mas = Fs \qquad \Rightarrow \qquad m \cdot \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = Fs \qquad (5.3.19)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = Fs \tag{5.3.20}$$

となることがわかる. 左辺は運動エネルギーの変化であり,右辺は物体に加えられた仕事である. 確かに上で述べた関係が成り立っていることがわかる.

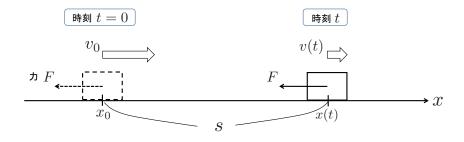


図 5.4: ブレーキが掛かって減速する物体

第6章 ポテンシャルエネルギーと力学的エネルギー 保存則

6.1 はじめに

仕事とエネルギーに関する要点をまとめる.

- 仕事 = それを与えられた物体がどれだけ外部に影響を及ぼせるかを表す. 式では $W = {f F} \cdot {f r}$
- 仕事をされた物体にはエネルギーが蓄えられる
- 力学で扱うエネルギーの種類
 - 運動エネルギー: $K = \frac{1}{2}mv^2$
 - ポテンシャルエネルギー(位置エネルギー): U(x) (重力によるもの、ばねの復元力によるものなど)
 - 力学的エネルギー = 運動エネルギー + ポテンシャルエネルギー
- 物体に外部から仕事を与えると、物体の運動エネルギーが変化する: $W=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$
- ポテンシャルエネルギーは、保存力にさからってする仕事によって蓄えられる
- ポテンシャルエネルギーを微分 → 保存力(にマイナスをつけたもの): $F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$
- 力学的エネルギー保存則は運動方程式を積分することで導かれる
- ポテンシャルの形を見れば物体の運動のおおまかな様子がわかる

6.2 ポテンシャルエネルギー(位置エネルギー)と力学的エネルギー保存則

6.2.1 保存力

物体に加えられる力が、物体の位置のみで決まる場合がよくある、そのような力を保存力とよぶ、

保存力の例

- ・ 地表近くでの重力:大きさ mg (一定)
- 自然長から x だけ伸びた (または縮んだ) ばねの復元力 :kx

- 質量 M の物体から r だけ離れた地点で質量 m の物体が受ける万有引力:大きさ $G\frac{Mm}{r^2}$
- 電気量 Q の物体から r だけ離れた地点で電気量 q の物体が受けるクーロン力 : 大きさ $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}$

保存力は位置のみの関数なので $\mathbf{F}(x,y,z)=\mathbf{F}(\mathbf{r})$ と書ける. 1次元なら F(x) とか F(r) のようになる.

ところで、保存力でない力もいくらでもあるが、講義で出てきた速度に比例する抵抗力 -kv はその一つである。実際この力は位置のみに依存せず、速度の関数になっている(F(x) でなく、F(v) となっている)。他にも、物体間に働く動摩擦力もその例である。これは相対速度に依存せず一定値を取るが、運動の向きに依存する性質を持っており、同じ一定値でも運動の向きには依存しない重力とは性質が異なる。また、ブランコが大きく振れるようにタイミングよく加える力(= 時間に依存する力)だとか、逆にブランコを止めるようにブレーキをかける力なども、明らかに位置のみに依存する力ではない。

こういった「非保存力」があるときは、次の節で述べる力学的エネルギー保存則は成立しない.摩擦があれば力学的エネルギーが熱に化けていって運動が止まってしまったり、外からエネルギーを加え続けて振動を増幅させたりしている状況でエネルギーが保存しないのは理解し易いと思う.

6.2.2 ポテンシャルエネルギー

物体に保存力が加えられているとすると, 運動方程式は

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \tag{6.2.1}$$

となる. 簡単のため1次元で考えるなら,

$$ma = F(x) \tag{6.2.2}$$

である. 以下この場合について扱う. 上の式の両辺に速度 v をかけると

$$m\frac{dv}{dt}v = F(x)v \tag{6.2.3}$$

となるが、運動エネルギーのところでやったように、左辺は

$$m\frac{dv}{dt}v = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \tag{6.2.4}$$

に等しい. そこでこの両辺を時間で積分してみると

$$\int m \frac{dv}{dt} v dt = \int F(x) v dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) dt = \int F(x) \frac{dx}{dt} dt \tag{6.2.5}$$

となるが、最後の式の右辺は合成関数の積分になっているので

$$\int F(x)\frac{dx}{dt}dt = \int F(x)dx \tag{6.2.6}$$

のように、保存力 F(x) を x で積分したものになる.また左辺は積分を実行できて

$$\int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2\right) dt = \frac{1}{2}mv^2 + C \tag{6.2.7}$$

となる. ここで C は積分定数である. まとめると

$$\frac{1}{2}mv^2 + C = \int F(x)dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 - \int F(x)dx = -C = -\Xi$$
 (6.2.8)

が得られる. ここで

$$U(x) = -\int F(x)dx \tag{6.2.9}$$

と書き、一定値 -C を改めて適当な定数 E と書けば

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E \quad (-\vec{\Xi}) \tag{6.2.10}$$

となる. これが力学的エネルギー保存則であり,

$$U(x) = -\int F(x)dx \quad \Rightarrow \quad F(x) = -\frac{dU}{dx}$$
 (6.2.11)

のことをポテンシャルエネルギーまたは位置エネルギーと呼ぶ. 名前の由来は, 位置のみで決まるエネルギーであることと, 運動エネルギーのように見た目から明らかなエネルギーではなく,「運動する能力として秘めているエネルギー」であることから来ている.

ところで $F(x) = -\frac{dU}{dx}$ を見ると、 $\frac{dU}{dx}$ が負なら F(x) は正になる。つまりポテンシャルエネルギーが減少するような方向に向かって、保存力は働く。保存力はポテンシャルエネルギーを減らすように働くと言い換えてもよい。例えば物体が地球に引かれて落下する現象を物体に働く重力で説明する代わりに、物体が持っているポテンシャルエネルギーが減少する方向へと変化していくと解釈することもできる。

6.2.3 力学的エネルギーが保存しないのはどんなときか?

力学的エネルギーが保存するのは、物体に働く力が保存力のみであるときに限ると述べた.ということは保存力以外の力が働く場合には力学的エネルギーは保存しないことになる.

前に述べた摩擦力や空気抵抗のように保存力でない力は無限にあるが、考えているシステムの外側から物体に加えられる力は保存力ではない.これは「外力」と呼ばれるが、あたかも「神の手」のようなものだと思えばいい.例えば「壁の一端にばねをくくりつけ、他端におもりをつける.それを水平な床の上で振動させる」と言われたら、登場人物は文中に出てきたばね・おもり・床・壁だけで、最初にばねを伸ばして振動のきっかけを作る人は外部の存在である.こういう外部の人間が加える力を外力という.力学的エネルギーが保存するのは、外力によって振動が始まって以降の話である.1

今度は、机の上に止まっている物体を押して加速させるときを考えよう。最初は止まっていたのだから運動エネルギーはゼロで、押されて速度を持つ運動エネルギーが増えたということは物体の持つ力学的エネルギーは明らかに増加している(今、机の上で考えているので位置エネルギーはゼロ.このため

¹最初にまったく外力を与えなければ、おもりは止まったままなのでそもそも運動が始まらない.

「運動エネルギー = 力学的エネルギー」である). このエネルギーの増加は物体を外から押した仕事によるものである. 誰かが余分に何かをしたのだから, エネルギーが変化するのは当然だろう.

理解が難しいのは、負の仕事を加えるときかもしれない. なぜなら、「外から仕事をしたにも関わらず、 物体の力学的エネルギーが増加しない」からである.

例えば、重い荷物をそっと床に置くときを考えよう。手を離してしまえば荷物はドスンと床に落ちてしまう。手で支えている力が弱くてもそっと置くことはできないので、音がしないようにそっと置くときには、荷物に働く重力とちょうど同じ(くらいの)力を上向きに加え、その力をキープしつつ下にゆっくり動かしているはずである。この場合、力は上向きに加えているけれども物体は下向きに動いている。力の向きと進行方向が逆なので、これは負の仕事である。 $W = |F||r|\cos\theta$ の式で言えば、力 F と変位r が 180° 開いているから、

$$\cos 180^{\circ} = -1 \quad \Rightarrow \quad W = -|\mathbf{F}||\mathbf{r}| < 0 \tag{6.2.12}$$

のように負の仕事だと言ってもよい.

この場合,物体の力学的エネルギーは最初高い位置にあったときよりも減少している.「荷物を床にそっと置く」ために手は疲れるにも関わらず,物体の力学的エネルギーは増えないのだ.これは「床にそっと置くために加えた力」が,重力という保存力と逆向きの力だったからである.

高さ h まで持ち上げてある質量 m の物体に力を加えながらソロソロとゆっくり地面に下ろしていくとするなら、重力加速度の大きさを g として物体には重力 mg が働くから、物体をゆっくり下すには上向きに mg を加えればよい。よって床に置くまでに物体に加える仕事は $W=-|\mathbf{F}||\mathbf{r}|=-mgh$ という負の仕事になる。この仕事によって、最初に持っていた力学的エネルギー mgh がなくなってしまったわけである。

床に置いた荷物を持ち上げて、再び床に下ろすという操作でも同様に不思議な感じがする. 一旦持ち上げてから下ろせば、明らかに手は疲れる. 仕事をした自分はエネルギーを消費しているのに、結局のところ荷物は「床の上に置かれている」という最初の状態に戻ったのだから、力学的エネルギーは増えも減りもしていない. 一連の操作によって疲れているのに、それが荷物が持つエネルギーに転化していないのだ.

力について順番に考えていけばこれは納得がいく。荷物の質量をmとすれば,荷物には重力mgが働いている。そこで最初に荷物を持ち上げるとき,物体には最低でも大きさmgの力を加えてなければならない。この力を加えて高さhだけ持ち上げるとき,手がする仕事は $mg \times h$ よりmghである。この操作によって,荷物は最初床に置かれていたときよりもmghだけ多く力学的エネルギーを持つことになる。2

ここでもし手を離せば、荷物に加わる力は重力のみとなる、荷物は落下を始め、床にドスンと落ちる

 $^{^2}$ このとき,力学的エネルギーは保存していないことに注意.最初は床の上に置かれていたので,床の高さをポテンシャルエネルギーの基準(つまり床の高さにあるときポテンシャルエネルギーはゼロだと決める)とすれば,速度も持っていないので力学的エネルギーはゼロだったものが,mgh だけ増えている.手からの力という非保存力が加わったので,力学的エネルギーは保存しないのである.

だろう。そのときは保存力である重力しか働いていないので、力学的エネルギーは保存し、落下直前の荷物の速度は $\sqrt{2qh}$ となるはずである。

今考えたいのは荷物から手を離さずに、ゆっくり荷物を下ろしてそっと床に置く場合である。このときは前に述べたように、重力と釣り合う大きさmgの力を上向きに加えながら荷物を下げていくことになる。そっと床に置けたなら荷物の速度はゼロだったということだから、当初の状態に戻っており、荷物の力学的エネルギーもゼロに戻っている。これは、荷物を床に下ろすという操作がした仕事が-mghという負の仕事だったからである。負の仕事によって、持ち上げたことでせっかく蓄えたmghが消費されてmgh-mgh=0となったのである。単なる徒労に終わったということだ。

このように、仕事を加えればいつでも力学的エネルギーが増えるとは限らないことに注意してほしい。 負の仕事や、仕事ゼロということもあるのだ. 3 第 1 章の仕事のところで書いたことの繰り返しになるが、 こうなるのは力学における仕事とは

物体に力を加えて状態を変化させたことで、その物体が周囲の環境に影響を及ぼせるように なったかどうか

だからである.「自分としてはこれだけ頑張った」を見ているのではなく、その操作によって物体がどれだけエネルギーを蓄えたか、そしてそのエネルギーによって周囲の環境に影響を及ぼせるようになったかに注目しているのである. 日常生活で使われている「仕事」という言葉を力学に借りてきたために「なんとなく直観と合わない」ことが起きるが、わからなくなったら力学で気にしている仕事とはどんなものだったか、定義に戻って確認してほしい.

6.2.4 ポテンシャルエネルギーの例

地表近くでの重力によるポテンシャルエネルギー

地面を座標原点とし、鉛直上向きにx 軸を張る。重力加速度の大きさをg とするとき、質量m の物体に働く重力は-mg となる(重力は座標軸と逆向きであることに注意)。この力は位置のみに依存するから(というか一定値なので)保存力の一種である。

この保存力によるポテンシャルエネルギーは、定義から

$$U(x) = -\int^{x} F(x')dx' = -\int^{x} (-mg)dx' = mgx + C$$
 (C は積分定数) (6.2.13)

となる. ポテンシャルエネルギーの原点(つまり,どの位置でポテンシャルエネルギーをゼロとするか)は自由に決めてよい. なぜなら,エネルギーは絶対的な量ではなく,任意の二つの状態間の相対的なも

³物理的なプロセスではないが、こういうことはしょっちゅうある。やるだけ無駄だった仕事(= 仕事ゼロ)や、むしろ邪魔にしかなっていない仕事(= 負の仕事)は至るところで見かける。宿題やレポートにしても、どうせなら正の仕事になるように心がけたいものだ。人のレポートを写すだけの「写経」も漢字練習くらいにはなるかもしれないから考えようによっては正の仕事だが、人間は自分に都合のよい言い訳をいくらでも思いつく極めて優秀な生物であることは忘れてはなるまい。

のだからである.そこで x=0 をポテンシャルエネルギーの原点としてみる.つまり x=0 で U=0 となるように積分定数を調整すると

$$0 = U(x = 0) = mg \cdot 0 + C \tag{6.2.14}$$

より C=0 であればよいことがわかる. こうして、座標原点を基準とした時のポテンシャルエネルギーは

$$U(x) = mgx (6.2.15)$$

のように決まる.

ところで、この計算でもわかるように

ポテンシャルエネルギーとは、物体をある状態に持って行く時に保存力に逆らってする仕事

のことである.例えば、地面に置かれた物体が勝手に上昇を始めることはない.物体を上昇させたければ誰かが持ち上げるなりして、外力を加えなければだめである.このときに加えるべき最小の力は重力 mg である.この力でソロソロとゆっくり持ち上げてあげれば物体は上昇し、地面より高い位置に来る.そこから手を離せば物体は落下を始める.つまり運動を始める.物体が運動を始められるのは、重力に逆らう力を加えて物体を高い位置まで持って行ったからである.つまり、重力という保存力に逆らって仕事をしたことにより、物体に「運動できる能力・可能性」という形でエネルギーが蓄えられたのである.

この過程がポテンシャルエネルギーの定義式

$$U(x) = -\int F(x)dx = \int (-F(x))dx$$
 (6.2.16)

に表されている. -F(x) を積分しているが、このマイナスは「保存力 F(x) と大きさが等しくて逆向きの力」を表し、積分が「その力での仕事」を表している.

注1:

「物体を上昇させるのに必要な力は,重力 mg とちょうど同じではなく,わずかに大きくなければダメでなないか?」という意見もあるだろう.現実にはその通りで「動かし始める = 加速させる」であるから,重力よりもわずかに大きな力を加えなければ動き出すことはないのだが,ここで「力の大きさの最小値は mg」と言っているのは極限値の意味であり,現実にそうなるかどうかではなく,「持ち上げるのに必要な力の最小値は mg に漸近する」という意味だと解釈すべきものである.

なお、mg よりも大きな力で持ち上げれば物体はどんどん加速する.その場合はポテンシャルエネルギーだけでなく運動エネルギーも持ってしまう.今はポテンシャルエネルギーの分だけを純粋に取り出したいのでこのような「最低限の力」のみを考えている.こちらもあくまで極限的な操作であり,現実には「全く運動エネルギーを持たせずに物体を上昇させる」

ことはできない. 明らかに矛盾してしまう. こうした極限値としてのみ存在する理想的な変化を「準静的過程」といい,熱力学では「思考実験」として重要な役割を果たす.

注2:

ポテンシャルエネルギーの基準を決める際、上の例では不定積分しておいてから積分定数を 決めるという順で行ったが、積分の下限を基準点にしておいて定積分すると自動的に決める ことができる。実際、x=0をポテンシャルの基準としたければ定積分の性質から

$$U(x) = -\int_{0}^{x} (-mg)dx = \left[mgx'\right]_{0}^{x} = mgx$$
 (6.2.17)

のようになる. 一般にポテンシャルエネルギーの基準を $x=x_0$ に取りたければ

$$U(x) = -\int_{x_0}^x F(x')dx'$$
 (6.2.18)

でもってポテンシャルエネルギーを定義すればよい.この定義だと $U(x_0)=0$ になるのは明らかである.

ばねの復元力によるポテンシャルエネルギー

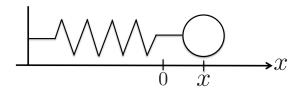


図 6.1: 単振動するおもり

ばね定数 k のばねに質量 m のおもりをつけて単振動させるケースをこれまで何度か扱ってきた.このとき自然長から x だけ伸びたばねがおもりに加える復元力もまた,保存力の一例である.これまで同様,図 6.1 のように x 軸を取ると,おもりが位置 x にあるときに受けている保存力は F(x) = -kx であるから,この場合のポテンシャルエネルギーはやはり定義より

$$U(x) = -\int (-kx)dx = \int kxdx = \frac{1}{2}kx^2 + C$$
 (C は積分定数) (6.2.19)

となる. ばねに伸びがないとき、ポテンシャルエネルギーをゼロとするのが自然なので(別にそうしなくてもよいが)、積分定数 C は

$$0 = U(x = 0) = \frac{1}{2}k \cdot 0 + C = C \tag{6.2.20}$$

より C=0 と決まる. よって、自然長のときを基準として、ばねのポテンシャルエネルギーは

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 (6.2.21)$$

となる.

万有引力によるポテンシャルエネルギー

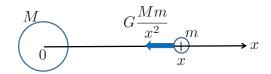


図 6.2: 原点に置かれた物体から、位置 x に置かれた物体に働く万有引力.

図 6.2 のように座標原点に質量 M の物体があり、そこから x だけ離れたところに質量 m の別の物体がある。質量 M の太陽が原点にいて、質量 m の地球がそこから距離 x だけ離れたところにいるところを想像すればよい。

このとき、地球が太陽から受ける万有引力は、万有引力定数を G として

大きさ:
$$G\frac{Mm}{x^2}$$
, 向き: $-x$ 方向 (6.2.22)

であるため、地球が持つ、万有引力からのポテンシャルエネルギーは

$$U(x) = -\int \left(-G\frac{Mm}{x^2}\right)dx = \int G\frac{Mm}{x^2}dx = -G\frac{Mm}{x} + C \quad (C は積分定数)$$
 (6.2.23)

となる.

ポテンシャルエネルギーの基準点だが,万有引力の場合は $x = \infty$ にすることが多い.そうしておくと式が簡単だからである.実際,

$$0 = U(x = \infty) = -G\frac{Mm}{\infty} + C = 0 + C \tag{6.2.24}$$

なので, $x=\infty$ を基準点とするためには C=0 とすればよいことがわかる. こうして

$$U(x) = -G\frac{Mm}{x} \tag{6.2.25}$$

となる (図 6.3).

もし、 $x = x_0$ をポテンシャルの基準点としたければ

$$0 = U(x = x_0) = -G\frac{Mm}{x_0} + C (6.2.26)$$

より $C = G\frac{Mm}{x_0}$ となって,

$$U(x) = -GMm\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right) \tag{6.2.27}$$

のように少々複雑になるので、特別な理由がなければ $x = \infty$ を基準としておいたほうが楽である.

注:

万有引力によるポテンシャルエネルギーは $U(x) = -G\frac{Mm}{x}$ という式からも,また図 6.3 からも明らかなように値が負である.「負のエネルギー」というと何となく不自然に思えるかもしれないが,これは

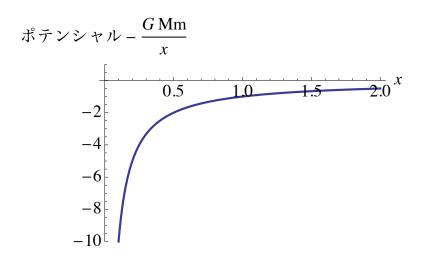


図 6.3: 万有引力によるポテンシャルエネルギー $U(x) = -G\frac{Mm}{x}$. 簡単のため,GMm = 1 としてプロットした.

- エネルギーに絶対的な値はなく、2つの状態の相対的な差だけに意味がある
- エネルギーが最大になる $x = \infty$ を、エネルギーの基準点にとった

という2つの理由によるものである.

まず1つ目の理由は、万有引力のポテンシャルエネルギーに限った話ではない。例えば机の上に置かれたペンが持つ重力によるポテンシャルエネルギーは、地面の上に置いた場合よりは大きいだろうが、天井の高さまで持ち上げたときよりは小さいだろう。このため、地面を基準とすれば(つまり地面に置かれたときにポテンシャルエネルギーをゼロとすることに決めれば)、机の上に置かれたペンのポテンシャルエネルギーは正になる。逆に、天井の高さまで持ち上げられた状態をポテンシャルエネルギーの基準にとれば、机の上に置かれたペンのポテンシャルエネルギーはそれよりは小さいから負ということになる。しかし、「机の上に置かれたペンのポテンシャルエネルギーは、地面に置いた場合よりは大きく、天井の高さまで持ち上げたときよりは小さい」という相対的な関係は変わらない。そして、この関係が変わらない以上、天井の高さまで持ち上げて手を離したときの方が、机の上からペンを落としてしまったときよりも、地面に衝突する直前でペンの速度は大きく、運動エネルギーも大きくなることがわかる。このようにポテンシャルエネルギーの差だけに物理的意味があるので、ポテンシャルエネルギーが負になること自体は奇妙なことではないのである。

万有引力のポテンシャルエネルギーの場合,式を単純にするために $x=\infty$ を基準にとった.この「2つの物体が無限の距離だけ離れた状態」というのは,「最もエネルギーが高い状態」である.地面より机の上,机の上より天井の高さの方がエネルギーが高いのは直観的に理解できると思うが,無限だけ離れた状態というのはその高さをずっと延ばしていって,宇宙の果てまで持っていった状態だからである.または,万有引力のために放っておいたら引き

つけ合う 2 つの物体を引き離して無限遠に置くという,「最もあり得ない,エネルギーの高い状態」に当たるのが $x=\infty$ だけ 2 つの物体が離れた状態である.そのような最もエネルギーの高い状態を U=0 というエネルギーの基準に取ってしまったので,それよりもエネルギーの低いその他の状態は,必然的に負のポテンシャルエネルギーを持つことになったのである.しかしこの場合も,ポテンシャルエネルギーで物理的に意味があるのは 2 つの状態の相対的な差のみなので,値が負でも特に問題はない.例えば,位置 A で U=-5J,位置 B で U=-8 J というようなことがあり得るが,-5 とか -8 という数字自体にはあまり意味がなく,「位置 A で持っているポテンシャルエネルギーは,無限遠にいるときに比べて 5 J 低い」とか,「位置 A と位置 B でのポテンシャルエネルギーの差は 3 J で,位置 A にいるときの方が高い.このため,位置 B にいる物体を位置 A まで持っていきたければ,最低でも B B のエネルギーを与えなければならない」といったことに物理的意味がある.

6.2.5 ポテンシャルエネルギーが経路によらないこと

きちんとした証明は次の節にある「線積分」を使わないことにはできないが、ポテンシャルエネルギーは経路によらず決まるという性質がある。例えば、地表近くでの重力によるポテンシャルエネルギーは高さのみで決まり、どういった道筋で、その高さまで持ち上げたかによらない。地面を基準とするとき、質量mの物体が高さhの地点で持つポテンシャルエネルギーはU=mghであるわけだが、最終的にこの地点に来るのであれば、直線的にそこまで来ようが、グニャグニャした道を通ってこようが、ものすごい高さまで一度行ってから下がって高さhの地点に落ち着こうが、物体が持つポテンシャルエネルギーはU=mghである。これは重力によるポテンシャルエネルギーだけでなく、あらゆるポテンシャルエネルギーに共通の性質である。

6.2.6 参考:3次元でのポテンシャルエネルギーと力学的エネルギー保存則(講義では扱わない)

3次元での運動方程式は ma=F であるが、右辺の力を保存力 F(r) とし、両辺で速度 v との内積を取って時間で積分すると

$$\int m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt = \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt \qquad \Leftrightarrow \qquad \int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) dt = \int \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt \qquad (6.2.28)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2} m v^2 - \int \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{\Xi} \qquad (6.2.29)$$

が1次元のときと同様に得られる. この一定値を E と書き、また

$$U(\mathbf{r}) = -\int \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \tag{6.2.30}$$

とすれば

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(r) = E \tag{6.2.31}$$

のように力学的エネルギー保存則が得られる.

$$U(\mathbf{r}) = -\int \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$
(6.2.32)

で表されるスカラー関数 U が 3 次元でのポテンシャルエネルギーである.

ここで $\frac{\partial}{\partial x}$ などは偏微分といい,「他の変数は固定して x のみ微分する」という意味の記号である. また,スカラー関数に掛かる微分記号

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{6.2.33}$$

のことを

と書いて

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} U, \quad \sharp \, \mathsf{t} \, \mathsf{t} \, \mathsf{t} \, \mathbf{F} = -\nabla U$$
 (6.2.35)

と表すことも多い.

6.3 ポテンシャルと運動の概形

ここからまた1次元に限って考える. 運動方程式をきちんと解かなくても, ポテンシャルの形と最初の速度やエネルギーがわかれば, 運動の大まかな様子をつかむことができる. なぜなら, 保存力のみが働いている場合には力学的エネルギーが保存し.

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = E - U(x)$$
 (6.3.1)

が成り立つが、 $\frac{1}{2}mv^2$ はゼロまたは正なので

$$E - U(x) \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad U(x) \le E$$
 (6.3.2)

を満たす範囲しか、物体は運動できないことがわかるからである.

物体が運動するとき、最初に持っていた力学的エネルギー E は運動エネルギーとポテンシャルエネルギーに割り振られる。その割合は時々刻々変化するが、合計値、すなわち力学的エネルギーが一定であることには変わりない。

物体の速度がゼロになって運動エネルギーがゼロのときは、U(x)=E、つまり力学的エネルギーが全部ポテンシャルエネルギーになっているはずである。逆に言うと、力学的エネルギーEとポテンシャルエネルギーU(x)が等しくなったときに物体の速度はゼロになって、動きが一瞬止まる。振り子が最高点に来たときや、ばねに付けられたおもりが振動の端で一瞬止まるときである。その一瞬の後は、物体は逆側に戻っていき、運動が一瞬止まった場所を乗り越えてさらに進み始めるようなことはない。最初に持っていた力学的エネルギーよりも大きなエネルギーが必要になってしまうからである。ない袖は振れない以上、最初に持っていた力学的エネルギーでもって、どの範囲を動けるかが決まってしまうのである。

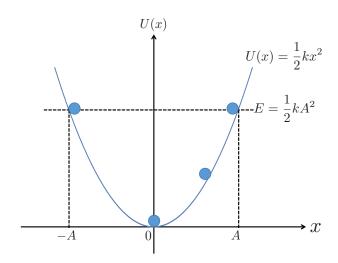


図 6.4: ばねの復元力によるポテンシャル、物体の動き方は、このポテンシャルの形をした入れ物の中を滑る物体の x 方向の動きと同じである.

例:単振動する物体のポテンシャルエネルギーと振動の範囲

これまでにも何度も扱ってきたが、摩擦のない水平面で単振動する質量 m の物体について考える. 物体はばね定数 k のばねにつけられているとする. このときばねが自然長となるところを振動の原点として x 軸をとると

物体の運動エネルギー :
$$K = \frac{1}{2}mv^2$$
 (6.3.3)

物体のポテンシャルエネルギー :
$$U = \frac{1}{2}kx^2$$
 (6.3.4)

であり、力学的エネルギーはもちろん E = K + U である.

最初, ばねを x=A まで伸ばしてからそっと手を離したとすると, 離した瞬間は速度がゼロなので, 力学的エネルギーは

$$E = \frac{1}{2}m \cdot 0^2 + \frac{1}{2}kA^2 = E \quad \therefore E = \frac{1}{2}kA^2$$
 (6.3.5)

である.ばねの復元力によるポテンシャルを図示すれば図 6.4 のようになるが,物体の振動の様子はこのポテンシャルの形をした入れ物の中を滑る物体の動きを x 軸方向に射影したものと同じになる.物体が運動できる範囲は $U(x) \le E$ を満たすことから $-A \le x \le A$ になる.これは動き始めたときに持っていた力学的エネルギー $E = \frac{1}{2}kA^2$ を超えて運動するとはできないからである.

位置 x において物体が受ける力はばねの復元力 -kx であるが,これは保存力 F とポテンシャル U の関係 $F=-\frac{dU}{dx}$ を思い出すと,図 6.4 のグラフの接線の傾きになっていることにも注意してほしい.

第7章 運動量・力積と運動量保存則

7.1 はじめに

- 運動量 p = mv, 運動の「勢い」を表す
- 力積 $\Delta I = F\Delta t$ (1次元なら成分で $\Delta I = F\Delta t$), 瞬間的に物体に与えられた「衝撃」を表すのに使う
- ullet 力積を与えると物体の運動量が変化する: $\Delta oldsymbol{p} = oldsymbol{F} \Delta t$
- 内力と外力
 - 内力:考えている系に含まれる「登場人物」が互いに及ぼし合う力.必ず,作用に対して反 作用に相当する力が存在する.
 - 外力:考えている系には含まれないものによる力. 反作用は考えない.
- 運動量保存則: いくつかの物体が存在する系があり、それらの間に内力しか働かないとき、その系 の運動量の合計は一定に保たれる.

7.2 運動量と力積

7.2.1 運動量の定義

物体の質量 m に物体の速度 v をかけた

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} \tag{7.2.1}$$

のことを運動量という. これは「運動の勢い」を表す量の一つと解釈できる.

例えば同じ速度で走ってきた車でも、軽自動車とダンプカーとでは衝突した際の衝撃は異なる.同じ 速度ならダンプカーのような質量の大きい車の方が激しい衝突になるだろう.逆に、同じ質量の車なら 速ければ速いほど、激しい衝突を引き起こすだろう.

ひと口に「衝撃」といっても何に注目するかによって測るべきものも変わるだろうが、今述べたように、速度が大きければ大きいほど、また質量が大きければ大きいほど「衝撃」が大きいのは間違いない。そこで質量 m と速度 v を掛け算した量である mv は、運動の勢いを表す目安の一つにはなるはずだ。このことは実験から確認され、ニュートンの運動の第2法則としてまとめられた。

7.2.2 運動方程式との関係

ニュートンの運動の3法則のうち,第2法則は「運動の法則」と呼ばれる.その中身を数式で表したのが運動方程式であり、これまで何度も出てきたたように

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{7.2.2}$$

という数式で表される。ここで質量 m が定数なら数字の 1 や 2 と同じように微分の中と外を出し入れできるので

$$\frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{7.2.3}$$

となる. この $\frac{d oldsymbol{p}}{dt} = oldsymbol{F}$ が元々の運動の第 2 法則であり、ここからわかるようにその内容は

物体の運動量の時間変化は、物体に加えた力に比例する

である. 質量 m が一定でないときは微分の外に出すことができないので運動量を使う元々の形で運動を解析する必要がある.

微分でなく、有限の微小な時間で表す方がわかりやすいかもしれないのでそちらでも説明しておくと、 微小時間 Δt の間に物体の運動量が p から p' に変化したとすると、その単位時間当たりの変化は

運動量の変化
変化に掛かった時間 =
$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p' - p}{\Delta t} = F$$
 (7.2.4)

を満たすということになる、上の式で分母の Δt を払って変形した

$$\Delta \boldsymbol{p} = \boldsymbol{F} \Delta t \tag{7.2.5}$$

という式もよく使う.この右辺に出てきた ${m F}\Delta t$ は力積 という.英語では impulse なので,その頭文字 I を使って

$$\Delta \mathbf{I} = \mathbf{F} \Delta t \tag{7.2.6}$$

と表すと,

$$\Delta \boldsymbol{p} = \Delta \boldsymbol{I} \tag{7.2.7}$$

と書ける. 言葉では

物体の運動量の変化は、物体に加えられた力積に等しい

とまとめることができる.

7.2.3 運動量で見るか、運動エネルギーで見るか

第 5 回の講義で学んだ運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ も「運動の勢い」を表す度合いとして使えるのではないかと思った人はいないだろうか。実際この量も運動の勢いに関係しており、ニュートンと同時代のドイツ人科学者ライプニッツは「運動エネルギーの大小で運動の勢いを測るべきだ」と主張した。これに対

7.3. 運動量保存則 57

しニュートンは、「運動量の大小で運動の勢いを測るべきだ」と主張した.「運動の勢い」が何なのか定義 されていない以上どちらが正しいとも判断できないが、どちらも関係していることは間違いない.実は、 両者の違いは運動の勢いを「運動が持続する時間」で測るか、「運動が持続する距離」で測るかだけで、 どちらもある意味正解である.

第5回で学習したように、運動エネルギーが変化するのは仕事をされたときである。つまり「力を加えながら動かす」ことが必要となる。第5回の宿題の最後で、摩擦力によって静止する物体の問題を扱ったが、そこで見たように物体が静止するまでに進む距離は物体の運動エネルギー変化に比例し、

$$\frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = Fs = -\mu mg \times s = (摩擦力) \times (進んだ距離)$$
 (7.2.8)

となる.

同じ問題で、物体が止まるまでの時間に注目することもできる。加速度は $-\mu'g$ なので(第 5 回の宿題の解答を参照)等加速度運動の公式から、物体の速度について

$$v(t) = v_0 - \mu' gt (7.2.9)$$

が成立する. 物体が静止するまでに掛かった時間を Δt とすると

$$0 = v_0 - \mu' g \Delta t \tag{7.2.10}$$

となることがわかる. この式の v_0 を左辺に移項し、さらに両辺を m 倍すると

$$m \cdot 0 - mv_0 = -\mu' mg \Delta t \tag{7.2.11}$$

を得る.この式の左辺は運動量の変化である.右辺は,摩擦力 $-\mu'mg$ に止まるまでの時間 Δt が掛け算されている.物体に加えられた力にその力が加えられていた時間をかけたものが力積だから,この式は

$$\Delta p = m \cdot 0 - mv_0 = F\Delta t = -\mu' mg \times \Delta t \tag{7.2.12}$$

$$=$$
 (摩擦力) \times (止まるまでの時間) $=$ 力積 (7.2.13)

となっている。これより、確かに運動量の変化は与えらえた力積に等しく、力 F が一定なら運動の継続時間 Δt は運動量変化に比例していることもわかる。

このように、物体の運動の勢いを「持続距離」を基準に議論するなら運動エネルギーを見ればいいし、 「持続時間」を基準に議論するなら運動量を見ればよい.

7.3 運動量保存則

運動量保存則は、例えば衝突や爆発、分裂のような内力のみしか働かない系、または正味の外力が打ち消しあって消えている系で成立する。これを見るために、図 7.1 のような N 個の物体から成る系を考えよう。

今,N 個の物体のうちで j 番目のものに注目する.その物体には,1 番目,2 番目,…,N 番目の物体がぶつかったり,互いに万有引力で引っ張ったりしながら力を及ぼす.それらの力をそれぞれ

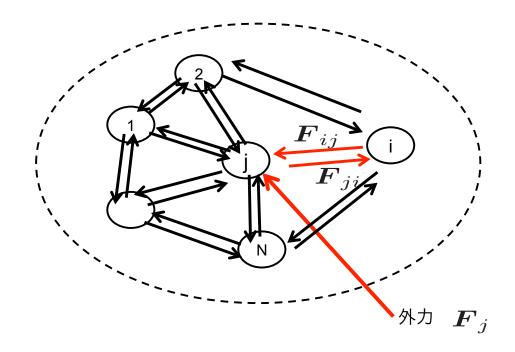


図 7.1: N 個の物体からなる系. j 番目の物体は残る (N-1) 個の物体全てから内力を受けている. また,系の外から外力 \mathbf{F}_i も受けている.

- 1番目の物体がj番目の物体に及ぼす力: F_{1j}
- 2番目の物体がj番目の物体に及ぼす力: F_{2j}

. . .

 \bullet N 番目の物体が j 番目の物体に及ぼす力: ${m F}_{Nj}$

と表す.一般に,

$$i$$
 番目の物体が j 番目の物体に及ぼす力: \mathbf{F}_{ij} (7.3.1)

である.

$$j$$
番目の物体に働く外力: \mathbf{F}_i (7.3.2)

としよう.

ここで,i 番目の物体が j 番目の物体に及ぼす力 \mathbf{F}_{ij} は内力であることに注目してほしい.例えばこれが万有引力だとすると,i 番目の物体が j 番目の物体をある力で引っ張っている時,j 番目の物体も i 番目の物体を同じ大きさで逆向きの万有引力で引っ張っている.接触して押すような力でも同様で,このような考えている系の構成メンバー間で働く力を内力と呼び

$$\boldsymbol{F}_{ji} = -\boldsymbol{F}_{ij} \tag{7.3.3}$$

が成立する.

一方、外力 F_j は系の構成メンバーが加えている力ではない.このように、「何が内力で、何が外力か」は「系の構成メンバーが誰なのか」を決めないと決まらない.例えば、地球から物体に働く重力を外力

7.3. 運動量保存則 59

とみなすか、内力とみなすかは、「地球まで系の構成メンバーとして考えなければいけないかどうか」で 決まる. 地上で小石が落ちるような場合、地球は全く動かないとして差し支えないだろうから、地球と 小石を一つの系として考えるよりは、重力を地球から小石への外力として考えれば十分だろう(実際今 までそうしてきた).

対して、巨大な隕石の衝突のように、地球自体の動きも考えなければ運動を解析できないときもある。この場合は地球も系の構成メンバーとして捉え、地球の動きについても運動方程式を立てて、隕石の運動方程式と連立させる必要がある。このとき地球と隕石との間の万有引力は内力とみなす。このように、「この力はいつでも内力」とか「その力ならいつも外力」というわけではなく、状況に応じて内力とみなしたり、外力とみなしたりするということなので気をつけてほしい。

さて、考えている系の解析に戻ろう. 当たり前だが、系の構成メンバー間で及ぼし合う内力 F_{ij} には、自分から自分への内力は存在しない. 数式では

$$\mathbf{F}_{jj} = 0$$
 (任意の j について) (7.3.4)

である. 1 これで $_i$ 番目の物体の運動方程式を書くことができるようになった。実際に書いてみると

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_{1i} + \mathbf{F}_{2i} + \dots + \mathbf{F}_{Ni} + \mathbf{F}_i$$
 (7.3.5)

となる. なお

$$m_i$$
: j 番目の物体の質量 $(7.3.6)$

$$a_i$$
: j 番目の物体の加速度 $(7.3.7)$

である.

ここで天下り的だが、 $1,2,\cdots,N$ 番目の物体の運動方程式を並べて書いて、それらを一気に足してみよう。 すると内力の性質 ${m F}_{ij}=-{m F}_{ji}$ および ${m F}_{jj}=0$ から

$$m_{1}\boldsymbol{a}_{1} = \boldsymbol{F}_{11} + \boldsymbol{F}_{12} + \cdots + \boldsymbol{F}_{1N} + \boldsymbol{F}_{1}$$
 $m_{2}\boldsymbol{a}_{2} = \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{22} + \cdots + \boldsymbol{F}_{2N} + \boldsymbol{F}_{2}$
 \cdots
 $+) m_{N}\boldsymbol{a}_{N} = \boldsymbol{F}_{N1} + \boldsymbol{F}_{N2} + \cdots + \boldsymbol{F}_{NN} + \boldsymbol{F}_{N}$
 $m_{1}\boldsymbol{a}_{1} + \cdots + m_{N}\boldsymbol{a}_{N} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{F}_{1} + \cdots + \boldsymbol{F}_{N}$

となることがわかる. $oldsymbol{F}_{ij} = -oldsymbol{F}_{ji}$ によって、内力は全て打ち消されてしまうのである. 残りは

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{a}_j = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_j \tag{7.3.8}$$

となる. 左辺はそれぞれの物体の質量と加速度とを掛けたものの和, 右辺は外力の和である.

見やすくするために,系の全運動量の和を

$$\boldsymbol{P} = \sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{v}_j \tag{7.3.9}$$

¹ミクロの世界では事情が変わってくる. 例えば電荷が、自分で作り出した電場から影響を受けるということがある.

とし,系に加わる外力の和を

$$\boldsymbol{F}_T = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j \tag{7.3.10}$$

と書くことにすると, 式 (7.3.8) は

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_T \tag{7.3.11}$$

と書き換えられる.

これより,

正味の外力がゼロ,つまり全ての外力が打ち消しあって $({m F}_T=0)$ なら,系の全運動量 ${m P}$ は一定に保たれる

がわかる.数式で書けば,

$$\mathbf{F}_T = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \mathbf{P} = -\mathbf{\Xi}$$
 (7.3.12)

である. これを運動量保存則という.

7.4 重心の運動

7.4.1 重心の定義

運動量保存則は重心の運動と関係がある.今,N 個の物体からなる系を考え,位置ベクトルが \mathbf{r}_j の場所に質量 m_i の物体があるとする.j は 1 から N を指す.このとき,重心の位置ベクトルは

$$\boldsymbol{r}_{G} = \frac{m_{1}\boldsymbol{r}_{1} + m_{2}\boldsymbol{r}_{2} + \dots + m_{N}\boldsymbol{r}_{N}}{m_{1} + m_{2} + \dots + m_{N}} = \frac{\sum m_{j}\boldsymbol{r}_{j}}{\sum m_{j}} = \frac{\sum m_{j}\boldsymbol{r}_{j}}{M},$$
(7.4.1)

で定義される。ここで M は系に含まれる物体の質量の合計である。シグマはスペースの関係で明示していないが、1 から N まで和を取るものとする。

7.4.2 重心の動きと運動量保存則の関係

ここで r_G を時間 t で微分すると

$$\boldsymbol{v}_G = \frac{d\boldsymbol{r}_G}{dt} = \frac{\frac{d}{dt} \sum m_j \boldsymbol{r}_j}{M} = \frac{\boldsymbol{P}}{M}.$$
 (7.4.2)

を得る. これより、もし P が一定なら、 v_G もまた一定であることがわかる. つまり、

系の運動量の和が保存するとき,系の重心の速度は一定に保たれる

ということである. 系の重心が最初に止まっていたなら,運動量が保存される限り,重心はずっと静止 し続けることもわかる. 7.4. 重心の運動 61

7.4.3 跳ね返り係数

運動量保存を使って物体の衝突や追突を調べるとき,跳ね返り係数という物理量を使うことが多い. 定義は以下の通りである.

1次元の衝突において、物体 1 と 2 を考え、それぞれの速度を v_1 、 v_2 とする.先を走っていた物体 2に後ろから物体 1 が追突して、速度がそれぞれ v_1' 、 v_2' 変化したとする、このとき、両者の相対速度の 変化の比(にマイナスをつけたもの)を跳ね返り係数という. つまり

$$e$$
 $\equiv -\frac{$ 追突後の相対速度
 追突前の相対速度
 $= -\frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1}$ (7.4.4)

$$= -\frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1} \tag{7.4.4}$$

である.

壁に衝突する場合、壁はずっと速度ゼロだから、上の式で $v_2=0$ として

$$e = -\frac{v_1'}{v_1} \tag{7.4.5}$$

となる.

特に,

e = 1 のとき:完全弾性衝突

e = 0 のとき:完全非弾性衝突

という. 完全弾性衝突とは, 衝突の前後で相対速度が変わらないような衝突である. これは衝突の際に へこんだり、音を出したりすることによる運動エネルギーの減衰がないということなので、このときは 運動量保存に加えて力学的エネルギー保存も成り立つ. e=1 以外の衝突では、運動量は保存するが、力 学的エネルギーは保存しない、この意味で、運動量の方が「保存し易い」と言えるかもしれない。

第8章 回転に関わる力:力のモーメントとベクトル 積 その1

8.1 はじめに:回転運動に関係する物理量

- (参考)並進運動
 - 運動方程式 $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$
 - 物体に力 F を加える → 力の方向に加速度 a が発生、力によって速度 v が変化
 - 力 F と加速度 a は比例, 質量 m と加速度 a の大きさは反比例

• 回転運動

- どのような力を加えると、回転するのか?
 - → 力の方向が重要, また, 回転軸から力点までの距離も重要
 - → 力のモーメント (トルク)
- 質量のような、回転運動を「変化させにくくする」物理量は?
 - → 慣性モーメント (次回第 10 回の講義内容)
- 回転の運動方程式はどんな形か?何が時間変化するのか?(次回第 10 回の講義内容)
- 力のモーメントなど、回転に関係する物理量を表すにはベクトル積(外積)が便利
- ベクトル積は、2つのベクトルから第3のベクトルを作る演算、内積とは全く違う量

8.2 回転を引き起こす要因

8.2.1 棒の回転

どのような物理量が回転に関係するかを見るために、図 8.1 のような棒の回転を考える。図のように、棒の端点に力 \mathbf{F} を加え、軸 O を中心に回転させることを考える。軸 O から点 A まで延びたベクトル (A の位置ベクトル) を \mathbf{r} とおく。

力 F は棒に平行でも垂直でもない,任意の方向を向いているが,この力のうち,棒を回転させること に役立つのは棒に垂直な成分のみである.力 F と,棒に沿う位置ベクトル r とのなす角を θ とすると,

(棒に垂直な力の大きさ) = (回転に役立つ力の大きさ) =
$$|\mathbf{F}|\sin\theta$$
 (8.2.1)

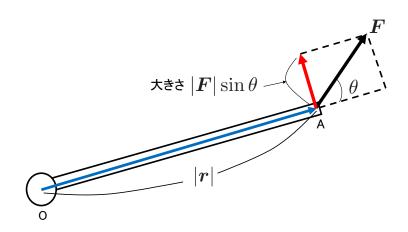


図 8.1: 物体を回転させるのに関わる物理量は,回転軸から力点までの距離 |r| と,r に垂直な力 $|F|\sin\theta$ である.

である.

ではこの力があれば棒は回転するかというとそうではない。当たり前だが、軸の真上を引っぱっても 回転するはずがない。同じ力で引くなら、なるべく軸から遠いところに力を加えた方が簡単に回転させ ることができる。つまり、力点(力を加えている点)は軸から遠いほど、簡単に回転を引き起こすこと ができる。すでに回転しているものを止めるときも同様で、なるべく軸から遠いところに力を掛けた方 が止めやすい。これは「てこの原理」である。

これらをまとめると.

物体をよりたやすく回転させるには、軸と力点を結んだ線に垂直な力を、なるべく軸から遠 いところに加える

となる. 軸から力点までの距離は |r| なので、これを数式で表せば

$$|F|\sin\theta \times |r| = |r||F|\sin\theta \tag{8.2.2}$$

という大きさの物理量が、回転の様子を決めるといえる.この物理量を力のモーメント(の大きさ)という.力のモーメントは別名トルクという.

8.3. ベクトル積 65

8.2.2 力のモーメントに関する問題

8.3 ベクトル積

8.3.1 ベクトル積の導入

力のモーメントは,位置ベクトル r と力 F とのベクトル積(外積)と呼ばれるものになっている. 1 記号では

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{8.3.1}$$

のようにベクトル積を「 \times 」で表す。これは「 $2\times3=6$ 」という掛け算の「 \times 」では<u>ない</u>。ベクトル積 という特別な計算を表す記号なので、数字のように省略したり、ドット (・) に置き換えてはいけない。数字のようにスカラー量なら

$$2 \times 3 = 2 \cdot 3 = 6, \quad a \times b = a \cdot b = ab$$
 (8.3.2)

だが、ベクトルの場合は

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \tag{8.3.3}$$

なのである. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ がベクトル積 (外積), $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ がスカラー積 (内積) であり、数字と違って $\mathbf{a}\mathbf{b}$ のように \times や・を省略した書き方はない. ベクトル積とスカラー積は異なる演算なので、省略してしまうとどっちを指しているのかわからないからである.

8.3.2 ベクトル積の定義

ベクトル積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ はベクトルの掛け算ではなく、2つのベクトル \mathbf{a} 、 \mathbf{b} から作られる「第3のベクトル」である。成分を使った定義と図形的な定義があり、もちろん2つは等価である。

ベクトル積の成分を使った定義

2つのベクトル

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \tag{8.3.4}$$

に対し、これらのベクトル積を

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$
(8.3.5)

と定義する.

 $^{^1}$ ベクトル積という言い方のほうがより正確である。外積はもっと広い概念で, $a \times b$ 以外のものも含む。内積も同様で,ベクトルの内積 $a \cdot b$ 以外にも,直交関数系の内積など,様々な内積を考えることができる。

ベクトル積の図形的な定義

ベクトルは向きと大きさを持った量なので、その2つを指定することで $a \times b$ を定義する. 2つの a, b に対し、それらのベクトル積 $a \times b$ は

- 大きさ: $|a||b|\sin\theta$ (θ は a,b のなす角)
- 向き:ベクトル a をベクトル b に重ねる向きに回転する右ねじがあったとき、その右ねじの進む方向

と定義される. 図8.2の通りである.

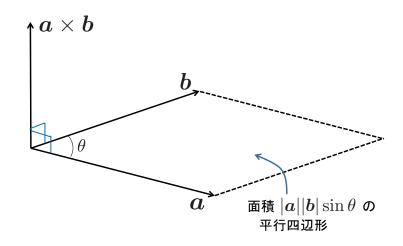


図 8.2: ベクトル積 $a \times b$ の図形的な定義. 大きさ (長さ) は、 $a \times b$ が張る平行四辺形の面積 $S = |a||b|\sin\theta$ に等しい. 向きは、 $a \times b$ に重ねるように回す方向に回転する右ネジが進む方向.

8.3.3 ベクトル積の特徴

ベクトル積は以下のような特徴を持ち、どれも極めて重要である.

1. 反対称性を持つ. つまり

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \tag{8.3.6}$$

(証明)

図形的な定義からは自明. 成分を使う定義でも,

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \begin{pmatrix} b_2 a_3 - b_3 a_2 \\ b_3 a_1 - b_1 a_3 \\ b_1 a_2 - b_2 a_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$
(8.3.7)

のように, すぐに示せる.

8.3. ベクトル積 67

2. 同じベクトル同士でベクトル積を取るとゼロ (ベクトル). つまり

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \tag{8.3.8}$$

(証明)

成分を使うなら

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_2 a_3 - a_3 a_2 \\ a_3 a_1 - a_1 a_3 \\ a_1 a_2 - a_2 a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$
 (8.3.9)

のようにすぐわかる. または反対称性の式 $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ で $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ とすると

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}) \tag{8.3.10}$$

なので、左辺へ移項して $2(\mathbf{a} \times \mathbf{a}) = \mathbf{0}$ より $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ が言える.

図形的な定義を使うなら、a 同士がなす角はもちろんゼロなので、 $a \times a$ の大きさは

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = |\mathbf{a}||\mathbf{a}|\sin 0 = 0 \tag{8.3.11}$$

となる. 大きさがゼロになるベクトルはゼロベクトルしかないので, $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ である.

3. 分配則

$$(a+b) \times c = a \times c + b \times c \tag{8.3.12}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \tag{8.3.13}$$

が成り立つ.

(証明)

成分を

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$
 (8.3.14)

とすると,

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_2 + b_2)c_3 - (a_3 + b_3)c_2 \\ (a_3 + b_3)c_1 - (a_1 + b_1)c_3 \\ (a_1 + b_1)c_2 - (a_2 + b_2)c_1 \end{pmatrix}$$
(8.3.15)

$$= \begin{pmatrix} a_2c_3 - a_3c_2 \\ a_3c_1 - a_1c_3 \\ a_1c_2 - a_2c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}.$$
 (8.3.16)

 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ も同様に示せる.

4. 積の微分公式

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}(t) \times \boldsymbol{b}(t)) = \frac{d\boldsymbol{a}(t)}{dt} \times \boldsymbol{b}(t) + \boldsymbol{a}(t) \times \frac{d\boldsymbol{b}(t)}{dt}$$
(8.3.17)

がスカラー関数の積の微分公式 (fg)' = f'g + fg' と同様に成り立つ.

(証明)

以下では $\frac{d}{dt}\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{a}}(t)$ とする.

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}(t) \times \boldsymbol{b}(t)) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a_{2}(t)b_{3}(t) - a_{3}(t)b_{2}(t) \\ a_{3}(t)b_{1}(t) - a_{1}(t)b_{3}(t) \\ a_{1}(t)b_{2}(t) - a_{2}(t)b_{1}(t) \end{pmatrix} \tag{8.3.18}$$

$$= \begin{pmatrix} \dot{a}_{2}(t)b_{3}(t) + a_{2}(t)\dot{b}_{3}(t) - \dot{a}_{3}(t)b_{2}(t) - a_{3}(t)\dot{b}_{2}(t) \\ \dot{a}_{3}(t)b_{1}(t) + a_{3}(t)\dot{b}_{1}(t) - \dot{a}_{1}(t)b_{3}(t) - a_{1}(t)\dot{b}_{3}(t) \\ \dot{a}_{1}(t)b_{2}(t) + a_{1}(t)\dot{b}_{2}(t) - \dot{a}_{2}(t)b_{1}(t) - a_{2}(t)\dot{b}_{1}(t) \end{pmatrix} \tag{8.3.19}$$

$$= \begin{pmatrix} \dot{a}_{2}(t)b_{3}(t) - \dot{a}_{3}(t)b_{2}(t) \\ \dot{a}_{3}(t)b_{1}(t) - \dot{a}_{1}(t)b_{3}(t) \\ \dot{a}_{1}(t)b_{2}(t) - \dot{a}_{2}(t)b_{1}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{2}(t)\dot{b}_{3}(t) - a_{3}(t)\dot{b}_{2}(t) \\ a_{3}(t)\dot{b}_{1}(t) - a_{1}(t)\dot{b}_{3}(t) \\ a_{1}(t)\dot{b}_{2}(t) - a_{2}(t)\dot{b}_{1}(t) \end{pmatrix} \tag{8.3.20}$$

$$= \begin{pmatrix} \dot{a}_{1}(t) \\ \dot{a}_{2}(t) \\ \dot{a}_{3}(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{1}(t) \\ b_{2}(t) \\ b_{3}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1}(t) \\ a_{2}(t) \\ a_{3}(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{b}_{1}(t) \\ \dot{b}_{2}(t) \\ \dot{b}_{3}(t) \end{pmatrix} \tag{8.3.21}$$

$$= \dot{a}(t) \times \boldsymbol{b}(t) + \boldsymbol{a}(t) \times \dot{\boldsymbol{b}}(t) \\ = \frac{d\boldsymbol{a}(t)}{dt} \times \boldsymbol{b}(t) + \boldsymbol{a}(t) \times \frac{d\boldsymbol{b}(t)}{dt} \tag{8.3.23}$$

5. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は \mathbf{a}, \mathbf{b} の両方に直交する. よって

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0, \quad \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$$
 (8.3.24)

(8.3.23)

が成り立つ.

(証明)

図形的には定義のとおり. 成分を使う定義でも示せる (→ 宿題).

6. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の大きさ $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$ は、2 本のベクトル \mathbf{a} 、 \mathbf{b} が作る平行四辺形の面積に等しい。 (証明)

図形的には定義のとおり、成分を使う定義でも示せる(→ 宿題).

ベクトル積と力のモーメント(トルク) 8.4

式 (8.2.2) で表された,力のモーメントの大きさ $|r||F|\sin\theta$ は,位置ベクトル r,力のベクトル F の ベクトル積の大きさに等しい. つまり

$$|\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}|\sin\theta \tag{8.4.1}$$

である. この

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{8.4.2}$$

というベクトル量を、力のモーメントまたはトルクとよぶ.このことからわかるように、力のモーメントはベクトル量であり、向きを持つ.講義で説明するが、その向きは物体が回転するときの回転軸の方向に一致する.

第9章 回転に関わる力:力のモーメントとベクトル 積 その2

9.1 はじめに:角運動量と回転の運動方程式

- 回転を引き起こす要素:力のモーメント(トルク) $N = r \times F$
- 角運動量の定義: $L = r \times p$ (r:物体の位置ベクトル, p:物体の運動量ベクトル)
- 角運動量はベクトルなので、向きと大きさ(長さ)を持つ
 - 角運動量の向き:回転軸の向きを表す. その回転軸を右ねじの進む向きとしたときに、右ねじが回転する方向に物体は回転している.
 - 角運動量の大きさ:面積速度の 2m 倍 (m は質量)
- 力のモーメントによって,角運動量が時間変化する → 回転の運動方程式 $\frac{d m{L}}{dt} = m{N}$
- 角運動量保存則:力のモーメントがない、もしくは打ち消し合って正味ゼロのとき、角運動量は一定に保たれる (N=0 のとき、L=-定)

9.2 角運動量

力のモーメント(トルク) $r \times F$ が回転運動に関わる量であることはわかるが、これを加えることで時間変化するのはどんな物理量なのか。

cf. 運動量の変化と力

力 F を加えると、物体の運動量 p が変化する. つまり

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{9.2.1}$$

が成り立つ. これが本来の、ニュートンの運動の第2法則である. 運動量は p=mv のよう に質量に速度をかけたものであり、大抵の場合は質量が一定値なので、

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$$
(9.2.2)

のように、微分の外にくくり出して書いている。質量が一定でない場合にはこのように質量 を微分の外に出すことはできない。

9.2.1 角運動量の定義

力のモーメント $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ を加えたことで変化する物理量を見つけるために,運動方程式 $m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$ を使う.運動方程式の両辺で \mathbf{r} とのベクトル積を取り $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ の形を作ると

$$r \times m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = r \times \mathbf{F}$$
 (9.2.3)

$$\Leftrightarrow m\left(\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{9.2.4}$$

となる. m は定数なので微分の中に出し入れできることを用いた. ここでベクトル積の性質から

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{9.2.5}$$

が成り立つことを用いる. なおこの式の証明は

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (:: 積の微分公式)$$
(9.2.6)

$$= \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (\because \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt})$$
(9.2.7)

$$= 0 + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (∵ 同じベクトル同士のベクトル積はゼロ)$$
 (9.2.8)

の通りである. さて、このことから式 (9.2.4) は

$$m\left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \Leftrightarrow m\frac{d}{dt}\left(\mathbf{r} \times \mathbf{v}\right) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$
 (9.2.9)

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$
 (9.2.10)

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$
 (9.2.11)

と変形できる. ここで m は定数なので、数字の 1 や 2 のように微分の中や外に出し入れすることができること、また運動量が p=mv と書けることを使った.

最後の式 (9.2.11) を見ると,

力のモーメント $r \times F$ によって, $r \times p$ という物理量が時間変化する

ことがわかる. 回転運動において重要であると考えられるこの量

$$r \times p \tag{9.2.12}$$

のことを角運動量と呼ぶ. この量を

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{9.2.13}$$

とし, 力のモーメントを

$$N = r \times F \tag{9.2.14}$$

9.2. 角運動量 73

と書くことにすると, 式 (9.2.11) は

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N} \tag{9.2.15}$$

と表すことができ、これは「回転運動の運動方程式」とでも呼ぶべきものである。この方程式は、数式としては並進運動の運動方程式 $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$ と全く同じ形をしている。このため、回転運動もこれまでの並進運動と同じような解析方法を用いることができる。並進運動に現れる質量、位置、速度、加速度に対応する物理量も存在する。次回の講義では角運動量の物理的意味と合わせ、回転運動において質量などの役割を果たす物理量を紹介する。

9.2.2 角運動量と面積速度

角運動量 L はベクトル量だが、その向きと大きさは何を表しているのか、

例:等速円運動をしている物体

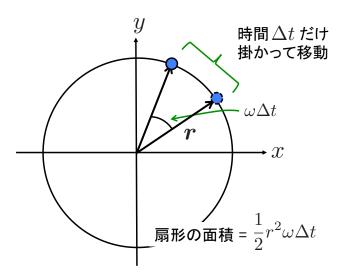


図 9.1: 等速円運動している物体が時間 Δt に描く扇形. この面積 $\frac{1}{2}r^2\omega\Delta t$ を時間で割ることで単位時間あたりの面積,すなわち面積速度 $\frac{1}{2}r^2\omega$ を得る.

質量 m の物体が xy 平面中で、座標原点を中心として半径 r の等速円運動をしている。角速度を ω 、 t=0 で $\mathbf{r}=(x,y,z)=(r,0,0)$ にいたとする。この場合の角運動量がどうなるか考える。

物体の位置ベクトルがx軸となす角は、時刻tでは ωt であることから

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (r\cos\omega t, r\sin\omega t, 0) \tag{9.2.16}$$

である. これを微分して速度 v を求め、それに質量 m を掛ければ運動量 p が

$$\mathbf{p}(t) = m\mathbf{v} = m\frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{9.2.17}$$

$$= (p_x(t), p_y(t), p_z(t)) = (-mr\omega \sin \omega t, mr\omega \cos \omega t, 0)$$
(9.2.18)

のように求まる. これらより, 角運動量は

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \begin{pmatrix} r \cos \omega t \\ r \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -mr\omega \sin \omega t \\ mr\omega \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mr^2\omega \end{pmatrix}$$
(9.2.19)

となることがわかる.

今,角運動量 $\mathbf{L}=(L_x,L_y,L_z)$ は,z 成分が $L_z=mr^2\omega$ で,x 成分と y 成分はゼロである.これは,物体の回転運動が z 軸を回転軸として,xy 平面内で起きていることに対応している.

回転方向は $L_z=mr^2\omega>0$ なので、z 軸を右ねじの進行方向としたときに、右ねじが回転する向きであることがわかる。今の回転は ${m r}=(r\cos\omega t,r\sin\omega t,0)$ だから、実際 xy 平面内でそのように回転していることがわかる。もし $L_z<0$ であれば、回転方向はそれと逆向きである。

大きさは $|\mathbf{L}| = mr^2 \omega$ だが,これは面積速度の 2m 倍になっている.面積速度とは,物体と原点を結ぶ線(動径)が単位時間あたりに「掃く」面積である.このケースのように等速円運動なら動径は円の半径のことで,半径が単位時間に描く扇形の面積が面積速度にあたる.

図 9.1 は,角速度 ω で等速円運動している物体を表す.等速円運動している物体の動径は,時間 Δt の間に角度 $\omega \Delta t$ 動く.よって扇形の面積は $\frac{1}{2}r^2\omega \Delta t$ であり,掛かった時間で割れば単位時間辺りの面積が $\frac{1}{2}r^2\omega$ だとわかる.

なお面積速度には「速度」という言葉がついているが、面積速度は単位時間あたりの面積であって、単位時間あたりの長さではない。 つまり MKSA 単位なら m^2/s が面積速度の単位であって、 m/s ではないので注意して欲しい。

9.2.3 面積速度とケプラーの第2法則

ケプラーは,太陽系の惑星には以下の3つの法則が成り立つことを見抜いた.

- 第1法則 惑星の軌道は、太陽を焦点の1つとする楕円軌道である.
- 第2法則 惑星と太陽を結ぶ動径が描く面積速度は一定である.
- 第3法則 惑星の公転周期の2乗と、公転軌道の長半径の3乗の比は全ての惑星について一 定である.

このうち第 2 法則に面積速度が含まれている.これは惑星の軌道は図のように楕円軌道であり太陽との距離や速度は時々刻々変化するが,どの時間においても動径が単位時間に掃く面積は一定になるというものである.図 9.2 で説明すると,点 A から点 A',点 B から点 B',点 C から点 C' に移動するまでにはどれも時間 Δt だけ掛かったとする.このときに動径が描く扇形は形こそ違うが,面積が同じになるということである.これは後で述べるように,地球や他の惑星は太陽から万有引力を受けて運動していることによる.万有引力は「中心力」と呼ばれるタイプの力で,距離にのみ依存し角度には依らない.このような力の下では角運動量が一定になるのだが,角運動量と面積速度は定数倍の違いしかないので面積速度も一定になる.

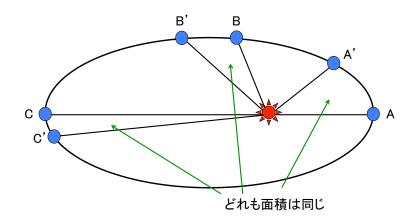


図 9.2: 惑星の公転は面積速度一定則をみたす. 点 A から A', 点 B から B, 点 C から C 'には、どれも同じ時間だけ掛かって移動している.

9.3 回転の運動方程式と角運動量保存則

回転の運動方程式

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N} \tag{9.3.1}$$

を見ると、力のモーメント(トルク)Nがないとき、または打ち消し合って正味ゼロになるとき、

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{L} = -\mathbf{\Xi} \tag{9.3.2}$$

となることがわかる. 文章でまとめると

物体に働く力のモーメント(トルク)がない,または正味ゼロのとき,物体の角運動量は一 定に保たれる

となる. これを角運動量保存則という.

ケプラーの第 2 法則である面積速度一定則が成り立つのは、地球などの惑星に太陽から働く万有引力のモーメントがゼロであり、角運動量が保存するためである(角運動量は面積速度の 2m 倍なので m が一定である限り、角運動量が保存するとき面積速度も保存する).

第10章 慣性モーメントと剛体の運動

10.1 はじめに:

- 力のモーメントによって,角運動量が時間変化する ightarrow 回転の運動方程式 $\dfrac{dm{L}}{dt}=m{N}$
- 質量のような、回転運動を「変化させにくくする」物理量 → 慣性モーメント
- 慣性モーメントが一定の場合,回転の運動方程式は $I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = N$
- 変形しないと理想化された物体 = 剛体
- 円や球など、対称性の高い剛体は慣性モーメントを(コンピューターを使わずに)計算できる
- 剛体が運動すると回転も伴うことが多いので、並進運動の運動方程式 ma = F と回転の運動方程 式を組み合わせて解くことになる.

10.2 慣性モーメント

これまでは1つの質点が回転運動するケースを考えてきたが、現実には観覧車のゴンドラのようにいくつもの物体が一斉に回転することもあるし、ボールや筒のように質点というより大きさを持った物体が回転することもある。それらの回転運動は1体の回転運動を足し合わせたものになり、慣性モーメントという物理量が重要になる。

10.2.1 質点系の角運動量と慣性モーメント

ここでは観覧車のようにいくつかの質点が一斉に回転する場合を考える。図 10.1 のように,N 個の質点が回転軸に付けられて回転しているとしよう。観覧車のゴンドラならどれも同じ質量で,同じ回転半径になっているだろうが,ここではより一般的なケースとして質点の質量はそれぞれ m_1, m_2, \cdots, m_N であり,質点と回転軸を結びつけている棒の長さは r_1, r_2, \cdots, r_N とする。棒は軽くて伸び縮みしないとする。

さて、系の回転軸が z 軸であり、xy 平面の中で角速度 $\omega=\frac{d\varphi}{dt}$ で回転しているとする.これ以降、角速度 ω は一定でなくてもよいものとしよう.これは議論に本質的ではないが、どうせなら非等速な円運動まで一般化しておきたいからである.

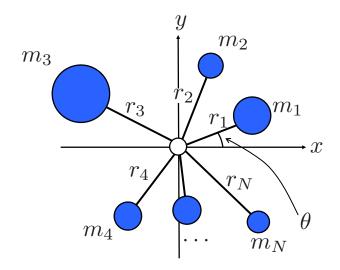


図 10.1: N 個の質点が異なる長さの棒で繋げられた系. 同じ角速度 $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ で回転する.

質点1が持つ角運動量は1つの質点の回転のときを参考にして

$$\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} 0\\0\\m_1 r_1^2 \omega \end{pmatrix} \tag{10.2.1}$$

となる. どの質点も同じ回転軸にくっついているので、角速度はどれも ω である. これより系全体の角運動量は、質点 1、2、 \cdots 、 N の分を全部足して

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 + \dots + \boldsymbol{L}_2 + \dots + \boldsymbol{L}_N \tag{10.2.2}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 r_1^2 \omega + m_2 r_2^2 \omega + \dots + m_N r_N^2 \omega \end{pmatrix}$$
 (10.2.3)

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(\sum_{j=1}^{N} m_j r_j^2\right) \omega \end{pmatrix} \tag{10.2.4}$$

となる. ここで

$$I = \sum_{j=1}^{N} m_j r_j^2 \tag{10.2.5}$$

と書くことにすると

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I\omega \end{pmatrix} \tag{10.2.6}$$

とすっきりまとめることができる.ここで導入した $I=\sum m_j r_j^2$ のことを慣性モーメント と呼ぶ. 回転の運動方程式へこの結果を代入すると

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ N \end{pmatrix} \tag{10.2.7}$$

10.2. 慣性モーメント 79

がわかる. ここで、今考えているような回転に必要な力は xy 平面内で働く力であり、その力のモーメントは z 軸に平行となるはずなので N は z 成分のみ持つとした. 1 式 (10.2.7) の z 成分のみ取り出すと

$$\frac{d(I\omega)}{dt} = N \tag{10.2.10}$$

を得るが、今のケースのように、慣性モーメント I が一定なら方程式 (10.2.10) で I を微分の外に出すことができて

$$I\frac{d\omega}{dt} = N \tag{10.2.11}$$

となる. これも回転の運動方程式の一つの表現である. これを変形すれば

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{N}{I} \tag{10.2.12}$$

となるが、これをニュートンの運動方程式を速度 v で書いたもの

$$m\frac{dv}{dt} = F \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$
 (10.2.13)

と比べると、そっくりな形であることがわかる。よって回転運動において質量 m と同じ働きをするのが 慣性モーメント I であり、

慣性モーメントは,回転運動の変化させにくさを表す

といえる. 慣性モーメントが大きい質点系があると、最初に止まっていたならなかなか回転させられないし、逆に最初から回転していたものはなかなか止められないことを表す. 質量が大きいとなかなか動き出さなかったり、すでに動いているものを止めるのが大変であることに対応している.

10.2.2 慣性モーメントと角運動量保存則

式 (10.2.10) で力のモーメント N がゼロの時

$$\frac{d(I\omega)}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad I\omega = -\vec{\Xi} \tag{10.2.14}$$

を得る. これも角運動量保存則の表し方のひとつである.

 $\overline{}^1xy$ 平面内でのみ働く力および位置ベクトルは z 成分を持たないため

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10.2.8}$$

と書けるはずである. よって力のモーメントは

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xF_y - yF_x \end{pmatrix}$$
(10.2.9)

のように、z成分しか持たない。前回の宿題にあった単振り子の場合の力のモーメントも同じようになっているので復習して欲しい。

この式を見ると、力のモーメントが働かないとき、慣性モーメントと角速度が反比例することがわかる。フィギュアスケートの選手がスピンをするとき、氷を蹴って回転し始めた後は足で氷を蹴っていないのに回転速度がどんどん速くなるのを見たことがある人もいるかもしれない。あれは角運動量保存則が成り立っていることからくる現象である。回転し始めるときには腕を広げて慣性モーメントを大きくし、その後で腕を体に引きつけて慣性モーメントを小さくすると、角速度が慣性モーメントに反比例して大きくなるのである。

10.2.3 回転の運動方程式の表し方

角速度は角度の時間変化である.一定の速度で回転する場合には,角度の変化を $\Delta \varphi$,変化に掛かった時間を Δt として

$$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \tag{10.2.15}$$

で計算できるが、一定の速度でない場合には微分を使って

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \tag{10.2.16}$$

で定義される. これを用いると回転の運動方程式は

$$I\frac{d\omega}{dt} = N \quad \Leftrightarrow \quad I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = N$$
 (10.2.17)

とも書ける. ちょうどこれは

$$m\frac{dv}{dt} = F \quad \Leftrightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = F$$
 (10.2.18)

と同じ関係である. さらに、角加速度

$$\alpha = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \tag{10.2.19}$$

という量を定義すれば

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F \quad \Leftrightarrow \quad ma = F \tag{10.2.20}$$

と同様に、回転についても

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = N \Leftrightarrow I\alpha = N \tag{10.2.21}$$

と書くこともできる. ついでに言うと、オリジナルの形である

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N} \tag{10.2.22}$$

は,

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{10.2.23}$$

と同じ形をしている.表す物理量こそ違うが方程式の形が同じなので,これまでに学習した解法を活用することができる.

10.3 連続体の慣性モーメント

質点とちがい、大きさを持つ物体で変形がないと近似できるような「かたい物体」を剛体と呼ぶ. 厳密な意味での剛体が現実に存在するわけではないが、剛体と近似して運動を計算できるものも山ほどある.

剛体ももとをただせば原子や分子のような質点の集合体であるが、私たちの手のひらを細胞の集合体ではなく、滑らかな皮膚と見ることができるのと同様に、剛体も滑らかな連続体が固まったもの見なして差し支えない.²特に円板や円柱、球や球殻といった、形がシンプルな連続体については、コンピューターで数値計算しなくても慣性モーメントを計算することが可能である.

捉え方	質点の集合体	連続体	
構成要素の質量	各質点 m_i	微小部分 $dm = \rho(\mathbf{r})dV$	
構成要素から回転軸までの距離	各質点からの距離 r_i	微小部分からの距離 $R(m{r})$	
全質量	$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$	$M = \int_{\mathbb{R}^d} dm = \int_{\mathbb{R}^d} \rho(\mathbf{r}) \ dV$	
慣性モーメント	$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$	$I = \int_{\mathbb{R}} dm \ R^2(m{r})$	

注:ここで r_i は各質点と回転軸との距離であり、質点の位置ベクトルの大きさ $|\mathbf{r}_i|$ のことではないので気をつけること.

10.3.1 慣性モーメントについて成り立つ定理(詳細は省く. 講義では扱わない)

(1) 平行軸の定理: $I = I_G + Mh^2 \ge I_G$

ここで、 I_G は重心周りの慣性モーメント、M は剛体の質量、h は重心から回転軸までの距離を表す(図 10.2)、この定理からは、重心周りの慣性モーメントが最も小さいことも言える。

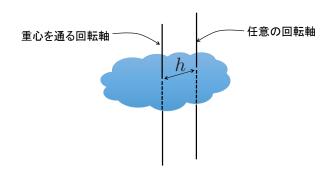


図 10.2: 任意の回転軸周りの慣性モーメントは、重心周りの慣性モーメントの値と、軸間の距離で計算することができる.

 $^{^2}$ もちろん剛体の素材の性質を調べたりするときにはそれを作っている原子や分子に注目しなければならない。物理とは「何を以て何を見るか」である。

(2) 薄板の直交軸の定理: $I_z = I_x + I_y$

ここで I_x, I_y, I_z は、xy 平面上に広がった薄い板の、x, y, z 軸周りの慣性モーメント(図 10.3)

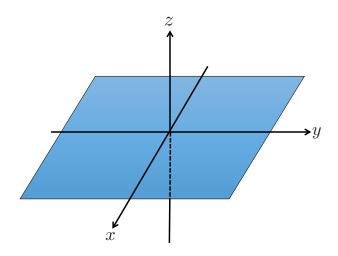


図 10.3: 薄板に関する慣性モーメント. x,y 軸周りの慣性モーメントを加えたものが z 軸周りの慣性モーメントに一致する.

10.3.2 いろいろな剛体の慣性モーメント(講義では結果のみ扱う.証明は次節以降)

以下のような形状の剛体については、慣性モーメントを簡単に求めることができる. どの剛体も内部の密度は均一で偏りなどはないものとする.

- (1) 質量 M, 半径 a の十分薄い板の中心を通り板に垂直な軸周りの慣性モーメント : $I=\frac{1}{2}Ma^2$ (図 10.4)
- (2) 質量 M, 半径 a, 高さ h の円柱の中心を通り円柱に平行な軸周りの慣性モーメント : $I=\frac{1}{2}Ma^2$ (図 10.4)

(つまり(1)と同じ値になる. 理由を考えてみよ).

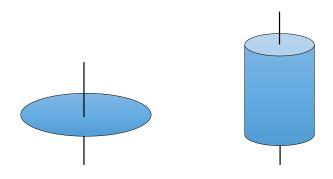


図 10.4: 円板と円柱. どちらも質量 M, 半径 r.

(3) 質量 M, 半径 a の細い円輪の中心を通り円に垂直な軸周りの慣性モーメントおよび質量 M, 半径 a の薄い円柱殻の中心を通り円柱に平行な軸周りの慣性モーメント: $I=Ma^2$

円輪の中心を通り,円の作る平面に沿う軸周りの慣性モーメントは (1) と同じ $I=\frac{1}{2}Ma^2$ (図 10.5)

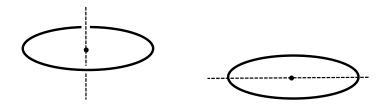


図 10.5: 円輪の中心を通り,円輪の作る平面に垂直な回転軸(左)および円輪の作る平面に沿う回転軸(右). どちらも質量 M,半径 r.

- (4) 質量 M, 半径 a の球の中心を通る軸周りの慣性モーメント: $I=\frac{2}{5}Ma^2$ (図 10.6 左)
- (5) 質量 M, 半径 a の薄い球殻(中がからっぽの球)の中心を通る軸周りの慣性モーメント: $I=\frac{2}{3}Ma^2$ (図 10.6 右)

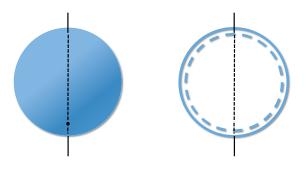


図 10.6: 球と球殻. どちらも質量 M, 半径 r.

(6) 質量 M, 長さ 2a の細い棒の中点を通り棒に垂直な軸周りの慣性モーメント : $I=\frac{1}{3}Ma^2$ (図 10.7)



図 10.7: 長さ 2a の棒

- (7) 質量 M, 辺の長さが AB=a, AD=b であるような薄い長方形 ABCD の板について,
 - a. 板の中心を通り長方形の辺 AB に平行な回転軸に関する慣性モーメント: $I=\frac{1}{12}Mb^2$ (図 10.8 左)
 - b. 板の中心を通り,板に垂直な回転軸周りの慣性モーメント: $I=\frac{1}{12}M(a^2+b^2)$ (図 10.8 右)

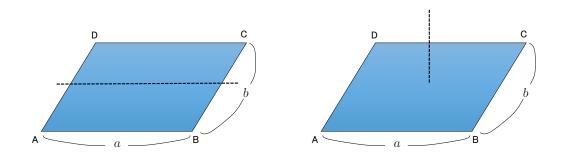


図 10.8: 長方形の慣性モーメント

10.3.3 斜面を転がる剛体の加速度

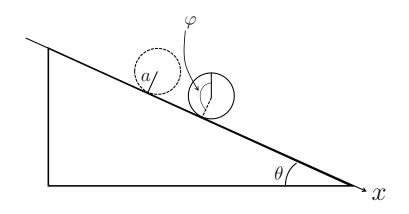


図 10.9: 斜面を転がる剛体

図 10.9 のように,角度 θ の斜面を質量 M,半径 a の剛体が滑らずに(スリップせずに)転がり落ちるとする.ここで剛体としては,球・円柱・球殻・円柱殻の4つを考えており,それらの慣性モーメントをまとめて I としておく.重力加速度の大きさは g として,それらの加速度を計算してみる.

剛体の運動方程式を立てるために,まず剛体に働く力を考える.この場合,剛体に働く力は鉛直下向きの重力 Mg と,斜面下の垂直抗力 N,そして斜面からの静止摩擦力 F がある.ここで摩擦力は動摩擦力ではなく静止摩擦力であることに注意してほしい.剛体はスリップ,つまり空回りせずに回転しているので斜面とは「がっちり」かみ合いながら転がっているからである.

さて、垂直抗力と重力のうち斜面に垂直な成分が釣り合うから

$$N = Mg\cos\theta \tag{10.3.1}$$

が成り立つ. 一方, 剛体(の重心)の斜面方向の運動方程式は

$$M\ddot{x} = Mq\sin\theta - F\tag{10.3.2}$$

となる。もし静止摩擦力 F がない場合は、剛体は転がらずにスリップしながら滑り降りていくことになる。ここで x 軸は斜面に沿って下向きを正に取った。

この運動方程式以外に,剛体を回転させる原因である力のモーメントの大きさが Fa であること,およびそれを使うとこの剛体の回転の運動方程式が

$$I\ddot{\varphi} = Fa \tag{10.3.3}$$

も成り立つ. ここで φ は最初の状態から測った、剛体の回転を表す角度である. また、図より剛体が斜面に沿って進んだ距離 x と、剛体の回転角 φ の間には $x=a\varphi$ の関係があることもわかる.

こうして得られた斜面方向の運動方程式・回転の運動方程式および x と φ の関係式を使うと \ddot{x} は g,M,θ,I を使って

$$\ddot{x} = \frac{M}{M + \frac{I}{a^2}} g \sin \theta \tag{10.3.4}$$

が導ける. $(\rightarrow$ 宿題)この結果へ球・円柱・球殻・円柱殻の慣性モーメントの値を代入すればそれぞれの場合の加速度が求まる. 3 また,摩擦がない場合に傾き θ の斜面を滑る質点の加速度も求め,比較することも可能である.

10.4 参考:連続体の慣性モーメントの計算法(フローチャート)

慣性モーメントの計算を苦手とする人は多いが、そんなにたいしたことではない. ようは

微小質量 dm とその微小質量から回転軸までの距離 $R({m r})$

を求め、上の表にある定義に従って積分するだけである。 そこで実際に

- 1. 微小質量を求める
- 2. 回転軸までの距離を求める
- 3. 積分する

という3つのステップに分けて説明しよう.

 $^{^3}$ 慣性モーメントの例にも書いたが、円柱と薄い円板とではどちらも慣性モーメントが $I=\frac{1}{2}Ma^2$ となる. なぜ同じなのか考えてみて欲しい.

ステップ1:微小質量を求める

基本中の基本から始めよう. 中学校で教わったように

である. 数式で書けば M を質量, ρ を密度, V を体積として

$$M = \rho \times V \tag{10.4.1}$$

である. ただし物体も場所によって濃かったり薄かったりするかもしれないから, 一般的には密度は $\rho(\mathbf{r})$ としておくべきだろう. つまり位置ベクトル $\mathbf{r}=(x,y,z)$ で指定される点 (x,y,z) (位置ベクトルの先が指しているところ) の密度が $\rho(\mathbf{r})=\rho(x,y,z)$ ということである.

次に点 (x,y,z) の周辺にとても小さい領域を考えて、その体積を dV としよう。その領域が非常に小さいなら、その中で密度はほとんど変わらないはずだから、その領域の質量は「密度×体積」として差し支えないだろう。つまり

$$dm = \rho(\mathbf{r}) \ dV \tag{10.4.2}$$

である。もし剛体の全質量 M を求めたければこの量を剛体全体にわたって足し上げる,つまり積分すればよく

$$M = \int_{\mathbf{M}} d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{M}} d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{M}} d\mathbf{r} \, dV \tag{10.4.3}$$

とすればよい、ところでこの計算をするときは剛体の形状によって便利な座標を選び

- デカルト座標では dV = dxdydz
- 3次元極座標では $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$
- 3次元円柱座標では $dV = rdrd\theta dz$

のように異なる微小体積素を使うことになる.4

ここで注意しなければならないのは、**剛体の形によって、違う密度を使っている可能性がある**ことである.というのも、ここまでは「密度」として

密度 = 単位体積あたりの質量 =
$$\frac{ 質量 M}{ 体積 V}$$
 (10.4.4)

で定義される体積密度を使ってきた. 5 しかし物体の形によっては「単位面積あたりの質量」や「単位長さあたりの質量」の方が重要なことも多い。例えば導線を考えてみて欲しい。導線を 2m 買うというのはわかるが、導線を $2m^3$ 買うというのはあまり聞いたことがない。もちろん導線の断面積がわかっていれば長さと掛けて体積は出せるが、何か面倒だ。こっちが売る側でそんなことを言ってくる客が来たら張り倒すか殴り倒すかしたくなる。どっちの方が効果的に倒せるかはともかく、導線のような細長い物体に関しては 1cm あたりどのくらいの重さなのかとか、1m あたりいくらなのかといった「単位長さあ

⁴なぜこうなるのか、これを求めるのに使うヤコビアンとは何なのかについては物理数学の「重積分」で紹介されると思う。 ⁵話を簡単にするために密度は一定としている.

たりの量」が重要なのだ.この「単位長さあたりの質量」のことを線密度という.一様な物体(どこでも均一で、ギュッと詰まっているところやスカスカのところがない物体)なら

線密度
$$\lambda = 単位長さあたりの質量 = \frac{質量 M}{物体の長さ L}$$
 (10.4.5)

である.

逆に線密度 $\lambda(x)$ が与えられていて、そこから全質量を求めたければ微小質量を物体に沿って積分すればよい、この場合、位置 x における線密度を $\lambda(x)$ とするとそのごくごく付近では線密度は一定と見なせるだろうから、その付近(x から x+dx の辺り)の微小な長さ dx の質量は

$$dm = \lambda(x)dx \tag{10.4.6}$$

となるはずである. ここで物体に沿ってx軸を張ってあるとした. あとはこれを

$$M = \int_0^L \lambda(x)dx \tag{10.4.7}$$

のように物体に沿って積分すれば全質量が求まる.ここで物体は x=0 から x=L まで伸びているものとした.

平べったい板のような形をしたものも同様で、この場合は「単位面積あたりの量」が重要になる。 $1m^2$ あたり何 kg なのか、とかである.6「単位面積あたりの質量」は面密度といい、一様な物体なら

面密度
$$\sigma = 単位面積あたりの質量 = \frac{質量 M}{物体の面積 S}$$
 (10.4.8)

で求めることができる.

逆に面密度 $\sigma(x,y)$ が与えられているなら、点 (x,y) における密度が $\sigma(x,y)$ ということだが、その点のごく近くに微小な領域を考え、その面積を dS とすればその微小部分の質量は

$$dm = \sigma dS \tag{10.4.9}$$

で求まる. これを物体全体にわたって積分すれば全質量が

$$M = \int_{\text{物体の面積}} \sigma dS \tag{10.4.10}$$

のように求まる. ここで dS は座標ごとに違っていて,

- デカルト座標では dS = dxdy
- 2次元極座標では $dS = rdrd\theta$ (r:動径, θ :角度)

である.

⁶平べったいものと言えばヒラメの単位面積あたりの質量はどのくらいなのだろう.カレイと同じくらいだろうか.マンボウではどうだろう.どうでもいいが、マンボウを正面から見たいと思うのは俺だけではあるまい.

ステップ2:微小部分から固定軸までの距離を求める

実はこの部分が慣性モーメントの計算のキモかもしれない. 見た目だけから言うと慣性モーメントの計算は重積分のところが一番難しく見えるが, あれは約束に従って計算するだけだからあまり頭を使う必要がないのだ. それに引き換え, このステップの計算は立体の適当な断面を考えなければならず, 脳が汗をかくような気がする(例えば円柱の, 中心を通らないような軸周りの慣性モーメントなど).

残念ながらこの計算には一般論がないので、具体例を使うことにしよう. 以下では考えている剛体中の任意の点を P としている. 必ず自分で図を描きながら読んでみること.

例 1: 質量 M, 半径 a の十分薄い板の中心を通り板に垂直な固定軸

 \rightarrow P の軸からの距離は r. よって R=r.

例 2: 質量 M, 半径 a, 高さ h の円柱の中心を通り円柱に平行な固定軸

 \rightarrow P の軸からの距離は高さに関係なく r. よって R=r.

例 3: 質量 M, 半径 a の細い円輪の中心を通り円に垂直な固定軸

 \rightarrow 円輪の半径は a で、P は当然輪の上. よって R=a

例 4: 質量 M, 半径 a の球の中心を通る固定軸

 \rightarrow P(x,y,z) は極座標で $(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\theta)$ で表される. z 軸を回転軸とすると(球であれば x,y,z 軸のどれを回転軸にとっても結果が変わらないのは明らか),その距離は $R=r\sin\theta$.

例 5: 質量 M, 半径 a の薄い球殻(中がからっぽの球)の中心を通る固定軸

 \rightarrow P は半径 a の球の表面上. よって前問を使って $R = a \sin \theta$.

例 6: 質量 M, 長さ 2a の細い棒の中点を通り棒に垂直な固定軸

 \rightarrow 中点を原点として棒に沿って x 軸を張る. 明らかに座標 x にある P と回転軸との距離は R=|x|.

ステップ3:積分する

このステップでは重積分をしなければならないことが多いのでビビってしまう人も多いだろう.しかし、実はこのステップが一番機械的なので楽なのである.積分という演算はそのくらい高度な道具だということだ.マスターしないなんて選択肢はあり得ない.ここではステップ2であげた例を実際計算してみよう.

例 1: 質量 M, 半径 a の十分薄い板の中心を通り板に垂直な軸周りの慣性モーメント

 \rightarrow 面状の剛体なので面密度を考えると $\sigma = \frac{M}{\pi a^2}$.

微小質量はこの σ を使って $dm = \sigma dS = \sigma r dr d\theta$ (円形なので 2 次元極座標を使った).

P の軸からの距離は R = r なので

$$I = \int dmR^2 = \int \sigma r dr d\theta \ r^2 = \int \sigma r^3 dr d\theta$$
$$= \sigma \int_0^a r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{M}{\pi a^2} \cdot \frac{1}{4} a^4 \cdot 2\pi = \frac{1}{2} M a^2$$
(10.4.11)

例 2: 質量 M, 半径 a, 高さ h の円柱の中心を通り円柱に平行な軸周りの慣性モーメント

ightarrow 筒状の物体で中が詰まっているので体積密度を考えると $ho = rac{M}{\pi a^2 h}$.

微小質量はこの ρ を使って $dm = \rho dV = \rho r dr d\theta dz$ (筒状なので 3 次元円柱座標を使った).

P の軸からの距離は高さに関係なく R=r なので

$$I = \int dmR^{2} = \int \rho r dr d\theta dz \ r^{2} = \int \rho r^{3} dr d\theta dz$$
$$= \rho \int_{0}^{a} r^{3} dr \int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{h} dz = \frac{M}{\pi a^{2} h} \cdot \frac{1}{4} a^{4} \cdot 2\pi \cdot h = \frac{1}{2} M a^{2}$$
(10.4.12)

例 3: 質量 M, 半径 a の細い円輪の中心を通り円に垂直な軸周りの慣性モーメント

ightarrow 輪状の1次元物体なので線密度を考えると $\lambda = \frac{M}{2\pi a}$.

微小質量はこの λ を使って $dm = \lambda dx$ (輪に沿って x 軸を取った).

P から軸までの距離は R = a なので

$$I = \int dmR^2 = \int_0^{2\pi a} \lambda dx \ a^2 = \frac{M}{2\pi a} \cdot 2\pi a \cdot a^2 = Ma^2$$
 (10.4.13)

例 4: 質量 M, 半径 a の球の中心を通る軸周りの慣性モーメント

ightarrow 球状の物体で中が詰まっているので体積密度を考えると $ho = rac{M}{rac{4}{9}\pi a^3}.$

微小質量はこの ρ を使って $dm=\rho dV=\rho r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi$ (球状なので 3 次元極座標を使った).

P の軸からの距離は $R = r \sin \theta$ なので

$$I = \int dmR^2 = \int \rho r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi (r\sin\theta)^2 = \int \rho r^4 \sin^3\theta dr d\theta d\varphi$$
$$= \rho \int_0^a r^4 dr \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi a^3} \cdot \frac{1}{5} a^5 \cdot \frac{4}{3} \cdot 2\pi = \frac{2}{5} M a^2 \qquad (10.4.14)$$

ここで $\sin 3\theta = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta$ より

$$\int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin 3\theta \right) d\theta = \left[-\frac{3}{4} \cos \theta + \frac{1}{12} \cos 3\theta \right]_0^{\pi} = \dots = \frac{4}{3}$$
 (10.4.15)

を使った.

例 5: 質量 M, 半径 a の薄い球殻(中がからっぽの球)の中心を通る軸周りの慣性モーメント

解き方その1

ightarrow 球状だが薄い殻しかないので平べったい物体と同様に面密度を考えると $\sigma=\frac{M}{4\pi a^2}$. 微小質量はこの σ を使って $dm=\sigma dS=\sigma a^2\sin\theta d\theta d\varphi$ (球の表面を表す微小面積素を使った). P の軸からの距離は $R=a\sin\theta$ なので

$$I = \int dmR^2 = \int \sigma a^2 \sin\theta d\theta d\varphi (a\sin\theta)^2 = \int \rho a^4 \sin^3\theta dr d\theta d\varphi$$
$$= \rho a^4 dr \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{M}{4\pi a^2} \cdot a^4 \cdot \frac{4}{3} \cdot 2\pi = \frac{2}{3} Ma^2$$
(10.4.16)

解き方その2

例 4 の問題を応用し、外半径 a、内半径 b の球を考える.つまり例 4 の球で、その中心から半径 b の球をくりぬいたものを考え、最後に $b \rightarrow a$ の極限を取る作戦である.この場合、密度が

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi(a^3 - b^3)} \tag{10.4.17}$$

となることと, r の積分範囲が 0 から a ではなく b から a までになることに気をつければよい. よってまず厚さ a-b の厚みがある球殻の慣性モーメントは

$$I = \int dmR^{2} = \int \rho r^{2} \sin\theta dr d\theta d\varphi (r \sin\theta)^{2} = \int \rho r^{4} \sin^{3}\theta dr d\theta d\varphi$$

$$= \rho \int_{b}^{a} r^{4} dr \int_{0}^{\pi} \sin^{3}\theta d\theta \int_{0}^{2\pi} d\varphi = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi (a^{3} - b^{3})} \cdot \frac{1}{5} (a^{5} - b^{5}) \cdot \frac{4}{3} \cdot 2\pi \qquad (10.4.18)$$

$$= \frac{2}{5} M \frac{a^{5} - b^{5}}{a^{3} - b^{3}} \qquad (10.4.19)$$

と求まるので、厚みのない球殻の慣性モーメントは

$$\lim_{b \to a} \frac{2}{5} M \frac{a^5 - b^5}{a^3 - b^3} = \lim_{b \to a} \frac{2}{5} M \frac{(a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)}{(a - b)(a^2 + ab + b^2)}$$

$$= \frac{2}{5} M \frac{5a^4}{3a^2} = \frac{2}{3} M a^2.$$
(10.4.21)

例 6: 質量 M, 長さ 2a の細い棒の中点を通り棒に垂直な軸周りの慣性モーメント

ightarrow棒状の1次元物体なので線密度を考えると $\lambda = \frac{M}{2a}$.

微小質量はこの λ を使って $dm = \lambda dx$ (棒に沿って x 軸を取った).

棒の中点をx軸の原点とするとPから軸までの距離はR = |x|なので

$$I = \int dmR^2 = \int_{-a}^{a} \lambda dx |x|^2 = 2\lambda \int_{0}^{a} x^2 dx = 2 \cdot \frac{M}{2a} \cdot \frac{1}{3} a^3 = \frac{1}{3} M a^2.$$
 (10.4.22)

他にも平行軸の定理や薄板の直交軸の定理を使うと簡単に求められる慣性モーメントもある. どの力学の問題集にも載っているので,自分でいろいろ当たってみてほしい. ついでと言っては何だが,せっかくの機会なので数学の問題集にある重積分の問題にも当たってみるとよいと思う.

第II部

電磁気学

第11章 クーロン力と電場

11.1 はじめに

- 電荷:電気を帯びた物体.電気量の単位は C (クーロン).
- 点電荷:質点のように、大きさがないと近似できる.
- 2つの電荷間には距離の2乗に反比例する力(クーロン力)が働く. 同符号の電荷には斥力, 異符号の電荷には引力が働く. 大きさは電荷間の距離の2乗に反比例.
- 電場:電荷による電気的影響が及んでいる場所.単位は V/m.
 (V/m は N/C と同じ)
- 大きさ E [V/m] の電場の中に q [C] の電荷を置くと、電場から大きさ F=qE [N] の力を受ける. (力も電場も大きさと方向を持つのでベクトル. よって元々は F=qE. この大きさだけ考えたのが F=qE)
- 正電荷が電場から受ける力の方向が、電場の方向. その向きに沿って書かれた曲線が電気力線.
- MKSA 単位系
 - 長さを m, 質量を kg, 時間を s (秒), 電流を A (アンペア) で測る単位系
 - -1A = 1C/s (クーロン毎秒), 1N/C = 1V/m

11.2 クーロン力と電場

11.2.1 電気の源

物体は原子の集合であり、その原子は中心の原子核とその周りを回転する電子からなる。両者は電気的な力で引き合って形を保っていると考えられる. 二つの電荷があると互いに力を及ぼしあう。その力をクーロン力という。クーロン力の方向は電荷同士を結ぶ方向に沿っていて、同符号なら反発し(斥力)、

¹これは古典的な捉え方である.正しくは量子力学や場の量子論の枠組みで考える必要がある.全ては相互作用の現れであって、大きさや形という概念は固定されたものではないことがわかる.

異符号なら引きつけ合う(引力). クーロン力の大きさは、それぞれの電気量に比例し、互いの距離の 2 乗に反比例する. 数式で表すとクーロン力の大きさ F は

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} [N]$$
 (11.2.1)

となる. 比例定数 $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ を k_0 と書いて

$$F = k_0 \frac{q_1 q_2}{r^2} [N]$$
 (11.2.2)

とすることもある. ここで

- q₁, q₂:二つの電荷の電気量(単位は C)
- r:二つの電荷の距離(単位は m)
- ϵ_0 : 真空の誘電率(およそ $8.9 \times 10^{-12} \text{C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$, 物質の中では値が異なる)

11.2.2 ベクトルによるクーロン力の表示

クーロン力も力なのでベクトル量であり、大きさと方向を持つ。座標の原点に電気量 Q の電荷があり、位置ベクトルが r のところに電気量 q の別の電荷があるとする。 このとき q が Q から受けるクーロン力の大きさは

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \tag{11.2.3}$$

であり、向きは Q から q へと向かう向きである. 2 クーロン力も力だから、当然ベクトル量である. このため、この力も向きまで考えてベクトルで表示することができ、

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \tag{11.2.4}$$

となる.

ここで,式(11.2.3)と式(11.2.4)の違いは後ろに

$$\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}\tag{11.2.5}$$

が付くか付かないかであり、これがクーロン力の方向を表す単位ベクトルである(図 11.1).念のため 復習しておくと、単位ベクトルとは大きさが 1 のベクトルのことで、 $\frac{r}{|r|}$ は,「r を,その大きさ |r| で割ったもの」だから,確かに大きさが 1 のベクトルになっている.大きさが 1 であるだけで方向は r に 平行なので,Q の置いてある原点から q のある位置に向かって伸びたベクトルと同じ,つまり原点から 放射状に伸びたベクトルである.

 $^{^2}$ 以下, Q や q は電気量と電荷の両方の意味で使う. つまり「電荷 Q」とは「電気量 Q の電荷」という意味である.

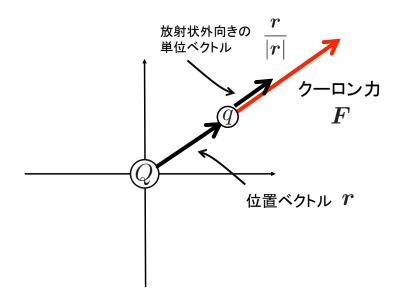


図 11.1: 電荷 Q が電荷 q に及ぼすクーロン力.

原点のような特別なところに以外に電荷があるときは式が少々複雑になる。実際,位置 ${m r}_q, {m r}_Q$ にそれぞれ電気量 q,Q の電荷が存在するとき,電荷 q が Q から受けるクーロン力は

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\frac{qQ}{|\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_Q|^2}}_{\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_Q|^2} \underbrace{\frac{|\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_Q|}{|\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_Q|}}_{\mathbf{q}_{q,q}} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_Q}{|\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_Q|^3}$$
(11.2.6)

である. 上の式で,真ん中の項の $|r_q-r_Q|^2$ はクーロン力が q と Q の距離の 2 乗に反比例することを表しており,次の $(r_q-r_Q)/|r_q-r_Q|$ は Q から q へ向かう向きの単位ベクトルを表す(一般に $\frac{a}{|a|}$ は,ベクトル a をその大きさ |a| で割っているので,大きさが 1 となり単位ベクトルになる).

11.2.3 クーロン力の重ね合わせ

力はベクトルなので、複数の力を合計するときはベクトルとして和を取る必要がある。例えば、「 $10\ N$ の力と $10\ N$ の力,合わせていくらか?」と言われても,同じ向きに加えるなら $20\ N$ だろうし, $10\ N$ ずつ逆向きに加えるなら打ち消しあって $0\ N$ になるだろう。クーロン力も力なので,いくつかの電荷からのクーロン力を合計するときは,ベクトルの重ね合わせになる。

位置 r_1, r_2, \cdots, r_N に置かれた電荷 q_1, q_2, \cdots, q_N が、位置 r にある電荷 Q に与えるクーロン力は

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i Q(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$$
(11.2.7)

となる.

11.3 ガウスの法則と電場

11.3.1 電場と力

電荷 q,Q は互いにクーロン力を及ぼしあうが、二つの電荷は接触しているわけではない。かといって離れたものに直接力を及ぼしているのではなく、電荷を置いたことで電気的な「影響」が空間に広がり、その空間から力を受けている(近接相互作用)。電荷を置くことで空間そのものの性質が「変性」したと思ってもよい。 3

そうした、電気的な影響が広がった空間を電場(または電界)という.⁴電場を目に見ることはできないが、他の電荷を置くと電荷が動き出すことから電場の存在を確認することはできる。磁石の周りに砂鉄を撒くと砂鉄が筋を作って並ぶが、あれは磁石の周りに磁場が存在しているからである。電場は磁場の電気版だと思えばよい。

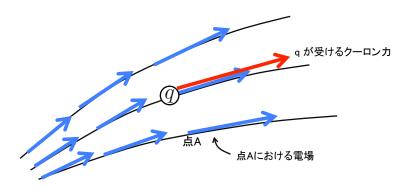
q [C] の電荷が電場から F [N] の力を受けるとき, 電場を

$$E = \frac{F}{q} \tag{11.3.1}$$

で定義する. つまり電場と力は

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \tag{11.3.2}$$

という関係にある(図 11.2). 1 C の電気量を持つ電荷が受けるクーロン力が電場だと言ってもよい.⁵



電場は空間の各点ごとに向きと大きさが決まるため、ベクトル「場」になる

図 11.2: クーロン力と電場の関係.

直観的には、「電荷を電場に置くと力を受けて動いた」という状況は「川の流れに葉っぱを浮かべたら力を受けて流れた」という状況と同じこととして理解できる。電場が川の流れのようなもので、そこに葉っぱのような質量を持つ物体を置けば、川から力を受けて動き始めるのと同じことだと思っておけばよい。

 $^{^3}$ 事実,電場の変動が伝わる波である電場は,水面波や音波のように水分子や空気のような媒質を必要とせず,真空中でも伝わる.空間そのものが媒質となるのである.

⁴英語の electric field から作った訳語である. 電場と呼ぶか電界と呼ぶかは分野ごとの慣習による.

 $^{{}^{5}\}mathbf{F} = q\mathbf{E}$ の式で q = 1 とすれば $\mathbf{F} = \mathbf{E}$ である.

 ${m F} = q {m E}$ という電場の定義からわかるように、電場も力同様ベクトルである.力の大きさや向きは場所ごとに変わるだろうから、電場の大きさや向きも場所ごとに変わる.このため電場は

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(x, y, z) \tag{11.3.3}$$

のように座標 (x,y,z) の関数である. 空間座標 (x,y,z) のことを位置ベクトル r でまとめて表し,

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \tag{11.3.4}$$

と書くこともある.

11.3.2 ベクトル場とスカラー場

電場のような、座標の関数のことを物理では「場」と呼ぶ. 6 電場は座標の関数であり、大きさと向きを持つベクトルなのでベクトル場とかベクトル値関数と呼ばれる。これに対し、例えば部屋の温度 T は場所ごとに異なるので T(x,y,z) と書けるが、温度には方向がないので、こちらはスカラー場(スカラー関数)である。

電場は空間の各点ごとに決まるベクトルなので,成分で書くこともある.電場のx,y,z 成分をそれぞれ E_x, E_y, E_z とすると,そのそれぞれが座標 (x,y,z) ごとに変わるので,明示すると

$$\mathbf{E} = (E_x(x, y, z), E_y(x, y, z), E_z(x, y, z))$$
(11.3.5)

となる. 三つのスカラー関数 E_x, E_u, E_z が一つのベクトル E を構成しているのである. スカラー関数

$$T = T(x, y, z) \tag{11.3.6}$$

と比べるとベクトル値関数がx,y,z成分の分だけ「3倍」ややこしくなっていることがわかる.

11.3.3 点電荷が作る電場

次に、電場の例を具体的に示す。最初に、点電荷が作る電場を点電荷同士に働くクーロン力を手掛かりに考えてみる。

まず、電気量 Q の点電荷を座標原点 (0,0,0) に置く.するとこの周囲に電場が発生する.次に位置ベクトル $\mathbf{r}=(x,y,z)$ で表される点に電気量 q を持つ別の点電荷を置く.すると二つの電荷の間にはクーロン力が生じる.q が Q から受けるクーロン力は

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{|\mathbf{r}|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \tag{11.3.7}$$

である.

 $^{^{6}}$ ここでは時間によって変化することがない電場を考えている.そうした電場を**静電場**という.時間変化する場合には E(t,x,y,z) のように 4 変数関数になる.

この式から電場を見抜く. 電荷 Q が周囲に作った電場から電荷 q は力を受けるのだから、上の式の中で q 以外の部分が Q により発生した電場だと考えられる. 7 つまり式 (11.3.7) で q 以外の部分である

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{|\boldsymbol{r}|^2} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} \tag{11.3.8}$$

がQの作った電場である.

まとめると、座標原点に置かれた電気量 Q の点電荷が作る電場は

- 電気量 Q に比例
- 電荷からの距離 |r| の2乗に反比例
- 向きは放射状で、Q が正のときは外向き、負のときは内向き (r/|r| は原点を中心として放射状で外向きの単位ベクトル)

である.

クーロン力の重ね合わせ同様,いくつかの電場が合わさった場合,合成された電場の向きと大きさもベクトルとして重ね合わせればよい.図を描いて矢印の合成をするだけでよいので公式を覚えることはほとんど意味がないが,一応書いておくと,位置 r にある電荷 q_1,q_2,\cdots,q_N が,位置 r に作る合成電場は

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$$
(11.3.9)

となる.8

11.3.4 その他の電場の例

点電荷が作る電場以外にも,形が単純で,現実の系でよく見られる電場がいくつかあるのでそれらを 挙げておく.

- 半径 a の金属球の表面に合計 Q の電気量の電荷が撒かれているとき (金属球の中心を座標原点とする)
 - 金属内部に電場は発生しない(静電誘導によって内部電場は消える)
 - 金属外部の電場の向き:放射状で, Q が正なら外向き, 負なら内向き
 - 金属外部の電場の大きさ: $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot \frac{Q}{|m{r}|^2}\cdot \frac{m{r}}{|m{r}|}$ (点電荷の場合と同じ、理由を考えてみよ)

 $^{^{7}3.1}$ 節で述べた電場の定義 E = F/q は同じことを言っている.

 $^{^8}$ 物理は公式だらけで面倒だと思う人が多いかもしれないが、むしろ言葉でダラダラ説明するより式で書いた方が情報を多く持たせることができるので楽なのである。このため、同じ式にしても汎用性の高いものが尊ばれる。例えばニュートンの万有引力の式はリンゴの落下から惑星の運行まで説明することができる極めて強力な式である。個人的には、人類が現在持っている最強の式は最小作用の原理 $\delta S=0$ だと思う。

- 面積 S の薄い金属板に合計 Q の電気量の電荷が撒かれているとき
 - 電場の向き:金属板に垂直で、Qが正なら金属板から離れる方向、負なら金属板に入る方向
 - 電場の大きさ:金属板の近くでは,一定値 $rac{Q}{2\epsilon_0 S}$
- 面積 S の 2 枚の金属板が向かい合って置かれており、それぞれに Q, -Q の電気量の電荷が撒かれているとき(コンデンサーに充電した状態)
 - 金属板の間に電場が発生、外側には電場がない(横からはわずかに漏れる)
 - 金属板間の電場の向き:金属板に垂直で,正電荷 Q から負電荷 -Q へ向かう向き
 - 金属板間の電場の大きさ:一定値 $rac{Q}{\epsilon_0 S}$

11.3.5 ガウスの法則

電場の一般的な性質はガウスの法則にまとめられている.ちゃんとやるのはややこしいが,その本質は 正の電荷からは電場が放射状に出る.電荷の電気量が大きいほど電場も大きい(強い)

ということに過ぎない。実に当たり前で自然なのだが、強いといってもどのくらい強いのかがわからないと何かを作ったり、電気を使ったりするときに困る。そのため、数字を使って具体的にどのくらいの大きさなのかといったことを定量化する必要がある。それをやったものがガウスの法則である。

高校物理の範囲では, ガウスの法則は

電気量 Q の電荷からは $\frac{Q}{\epsilon_0}$ の電気力線が出る

と表現されるが、これは簡単化して書かれたもので、オリジナルのガウスの法則には面積分という計算 を用いて表した積分形と、発散(divergence)という計算を用いて表した微分形の二つがある。それぞれ

積分形 :
$$\oint_{S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_{0}}$$
 (11.3.10)

微分形 :
$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
 (11.3.11)

となる.9

ここで,積分形の左辺に $\oint_S {\bf E} \cdot d{\bf S}$ があるが,これは「電場のうち,ある領域の表面に垂直な成分を全て集めて積分する」ということを表している. $d{\bf S}$ は領域の表面に垂直な方向に伸びたベクトルで,その大きさは微小な面積 $d{\bf S}$ である.これと電場との内積を取っているということは,電場のうち, $d{\bf S}$ に沿うもの,つまり領域表面に垂直なものだけ取り出したことになる. \oint_S は,表面 S で閉じられた領域について積分することを表す記号である.

ややこしいことをダラダラ述べたが、電場とは電荷から放射状に伸びたトゲのようなものなので、イメージとしては「ウニのトゲの本数を数えている」と思えばいい. ガウスの法則が言っているのは、電

⁹積分形は大局的な表現、微分形は局所的な表現である。

荷が大きければそれが作る電場も強くなるということに過ぎないので、つまりは「ウニの本体が大きければトゲの本数も多い」と言っているようなものである.¹⁰

微分形で書いたガウスの法則は、「電場は電荷から放射状に出る」を表現した数式であるが、詳細は別の機会に譲る.

 $^{^{10}}$ 大人も子供も腕が 2 本であるように、ウニの本体が大きくてもトゲの本数は変わらないのかもしれない。詳しいことは知らないので、あくまでイメージということで.

例題 (宿題ではありません)

問1 クーロンの法則

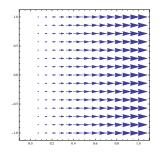
真空中のクーロンの法則の比例定数を $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}=9\times 10^{-9}{\rm N\cdot m^2/(A\cdot s)^2}$ として下の問題に答えよ.

- (1) 真空中に電気量がそれぞれ $3 \, \mathrm{C}$, $12 \, \mathrm{C}$ の電荷を距離 $2 \, \mathrm{m}$ だけ離しておくとき,互いの間に働くクーロン力の大きさは何 N か.
- (2) 距離 1 m だけ離して電子が二つ置かれているとするとき、電子の間に働く斥力の大きさと、電子の間に働く万有引力の大きさとを比較せよ。ただし電子の電気量の大きさは 1.6×10^{-19} C、電子の質量は 9.1×10^{-31} kg であり、万有引力定数は $6.7 \times 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ とする。

問2 電場の図示

図11.3を参考にして、下の式で表される2次元の電場をベクトルで図示せよ.

(手書きなので、もちろんおおまかな図でよい)



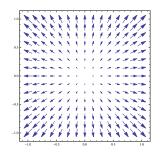


図 11.3: 左図: E = (x,0), 右図: E = (x,y)

- (1) $\mathbf{E} = (0, y)$
- (2) E = (x, y)
- (3) E = (y, 0)

問3 ガウスの法則

面積 S の金属板の両面に電荷が一様に分布している。電気量の合計は Q であるとする。金属板の厚みが無視できるとし、電場は金属板から垂直に出ていることを使い、ガウスの法則から、金属板の近くでの電場の大きさが $\frac{Q}{2\epsilon_0 S}$ で与えられることを示せ。

第12章 電位と電位差・磁場と電磁誘導・マクスウェル方程式と電磁波

12.1 はじめに

- 電位 $= 1 \, \mathrm{C}$ の電荷が持つ、電気的なポテンシャルエネルギー、単位は V (ボルト).
- 大きさ V [V] の電位を持つ点に q [C] の電荷を置くと、その電荷は U=qV [J] のエネルギーを持つ.
- 電圧 = 電位の差(電位差).
- 電場はベクトル量,電位はスカラー量
- 電場からの力(クーロン力)も保存力なので、力学的エネルギー保存則が成り立つ.
- 磁気を帯びた物体(磁荷)が磁場を作り、磁場中に別の磁荷を置くと力を受ける
- 電流を流すと、その周りを取り囲むような磁場が発生する
- 磁束の変化を妨げるように、誘導起電力が発生する(電磁誘導)
- 電荷は電場から力を受けると同時に、動いていると磁場からも力(ローレンツ力)を受ける

12.2 電位

12.2.1 力からポテンシャルへの読み替え

地表近くでは重力は一定となり、質量 m の物体に働く重力の大きさは重力加速度の大きさを g として mg である、重力を受けて物体は落下するわけだが、このことを

低い位置にある状態の方がポテンシャルエネルギーが低くなるので、より低くなろうとする

と捉えることもできる. 地表面を原点とし、地表から鉛直上方に x 軸を張れば、質量 m の物体が持つ ポテンシャルエネルギーは

$$U(x) = mgx (12.2.1)$$

で与えられる。これが小さくなる方向へと、物体は動き出すと考えることができる。これは

力を受けるとその方向に動く

1

自然は位置エネルギーが低くなる方に落ち着こうとする性質を持つ

と解釈できるという経験則に基づく.

そもそも「力」はとてもわかりにくいものである.目に見えないため「力とはどんなものか,具体的に示してくれ」と言われても困る.運動状態の変化から「力が働いたんだろうな」と考えるしかない.運動の原因をもっともらしく解釈したものなのである.となると,運動の原因をエネルギーの変化として解釈したっていい.以前,ポテンシャルエネルギーの形がわかれば運動の概形がわかることを説明したが,その考え方は実験事実をうまく説明しており,ポテンシャルエネルギーの変化が運動の原因だと考えても全く差し支えないのである.1

12.2.2 電気によるポテンシャルエネルギーと電位

電荷同士が反発したり引きつけ合ったりするのはクーロン力によるものだが、これも「ポテンシャルエネルギーが低い方へと自然は変化するものだ」と捉えることも可能である。では、電荷を置いたことにより生じた電気的なエネルギーは具体的にどのくらいなのか。これを知るためには、力学でポテンシャルエネルギーを計算した時と同様に、電荷をある場所から別の場所へと移動させるために必要な仕事を計算すればよい。

簡単のため 1 次元を考え,その方向に沿って x 軸を張る.保存力が働いているとし,その力の x 成分を F とするとポテンシャルエネルギー U とは

$$U(x) = -\int F dx \quad \Leftrightarrow \quad F = -\frac{dU}{dx}$$
 (12.2.2)

という関係にある.2 電気の場合についても同様に考えればよい.

一番簡単な例として一様な電場を考える。コンデンサーの極板に発生している電場を想像すればよい。 3 電場は x 軸の正方向に向いているとする。ベクトルとして表記すれば

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E_0 \boldsymbol{e}_x \tag{12.2.3}$$

$$U(\mathbf{r}) = -\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{F} = -\nabla U$$

であった.

¹物理学とは「再現性に裏打ちされた,その時代,その瞬間に最も尤もらしい屁理屈」なのだ.かっこよく言うと,これまでにも何度か述べたように「物理とは何を以って何を見るか」ということになる.見たいものに応じて必要な道具も,説明方法も変わるのである.自然とは,そして世界とは,畢竟解釈なのだ.そうであるならば無矛盾である限りは楽しく美しい解釈の方がよいと思うのだが,君たちはどう考えるか.そうなると,こんなものの出来不出来で落ち込んだり人に優越感を感じたりすることは馬鹿げたことだ.そのことを子供達には教えてあげてほしい.ただし,「物理なんぞ屁理屈だ」とまで言い切るにはそれなりに学んで使いこなせるようにならないといけない.それ相応の研鑽を積んだ人と,上っ面だけなぞった人とでは言葉の重みが違う.

²3 次元なら

^{3「}一様」とは「空間中のどの点でも同じようになっている」という意味である.

12.2. 電位 105

である. 4e_x はこれまで通り x 方向の単位ベクトルである.

このような電場に正電荷を置くと、その電荷は電場の向きである +x 方向に動く、電場の方向は正電荷が力を受ける方向と決めているからである。正電荷の電気量を q とすると、力の大きさは電場とクーロン力の関係 $\mathbf{F}=q\mathbf{E}$ から

$$F = qE_0 \tag{12.2.4}$$

である。+x 方向へ動き出すということは、そちらへ行く方が正電荷に取ってはポテンシャルエネルギーが低くなるということである。ポテンシャルエネルギーが具体的にどのくらいなのかを知りたければ、x=0 に正電荷を置いて、位置 x まで運ぶのに必要な仕事を計算すればよい。

電場中に置かれた電荷が受けるクーロン力は qE_0 で +x 方向だから,これを運ぶには最低でも大きさ qE_0 の力を -x 方向に加えればよい. $\lceil -x$ 方向に力を加えながら,x=0 から x まで運ぶ」のはちょっと変なシチュエーションだが,これは坂を転がり落ちようとする物体に,上向きに力を加えてゆっくり下ろしていくような状況である. $\lceil +x$ 方向へ勝手に進もうとする電荷に,逆向きの力を加えてゆっくりゆっくり進ませている」ということだ.

このために掛かる仕事は

$$W = \int (-qE_0)dx = -qE_0x + C$$
 (C は積分定数) (12.2.5)

である. これが、位置 x にいる電荷が持つポテンシャルエネルギーとなる. 積分定数 C がまた現れたが、力学のときと同様に、これは「どこをエネルギーの基準点に取るか」から決まる. どこをとっても構わないのだが、例えば位置 x=d を基準点 (U=0) にするなら

$$U(x = d) = -qE_0d + C = 0 \quad \therefore C = qE_0d \tag{12.2.6}$$

となり,

$$U(x) = qE_0(d-x) (12.2.7)$$

となることがわかる (図 12.1). 電位の傾きが電場の大きさに当たるので、電荷に取っては電位は山とか坂道のようなもので、電場はその坂の勾配だと思えばいい.

この式の中で,電気量 q 以外の部分 $E_0(d-x)$ の役目を考えると,これは「電場や空間そのものからくる,ポテンシャルエネルギーに関係する量」である.これを電位という.電場があって,そこに別の電荷を置くと動くということは,そこに「電気的な位置の高低差」が出来ていることなので,「電気的な位置」の意味で付いたネーミングである.q=1 のとき $U=E_0(d-x)$ なので,1 C の電荷が位置 x に置かれたときに持つポテンシャルエネルギーだと言ってもいい.今の場合,具体的には

$$V(x) = E_0(d - x) (12.2.8)$$

である(図12.2).

$$m{E}(m{r}) = \left(egin{array}{c} E_0 \\ 0 \\ 0 \end{array}
ight)$$

である.

⁴これも3次元で考えるなら

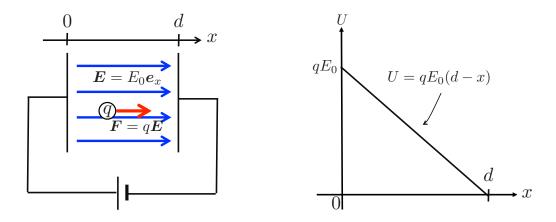


図 12.1: 電場が一定の場合に電荷が受ける力、および電場中で電荷が持つポテンシャルエネルギー.

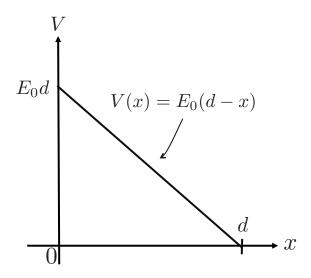


図 12.2: 電場が一定の場合の電位. コンデンサー間の電場がこれに相当する.

一般に、電気量 q の電荷がポテンシャルエネルギー U を持つとき、電位とは

$$U(x) = qV(x) \quad \Leftrightarrow \quad V(x) = \frac{U(x)}{q}$$
 (12.2.9)

の関係にある. これと

$$F = -\frac{dU}{dx}$$
 および $F = qE$ (12.2.10)

を合わせると、電場と電位には

$$E = -\frac{dV}{dx} \Leftrightarrow V(x) = -\int E dx$$
 (12.2.11)

という関係があることがわかる. 力 F とポテンシャルエネルギー U の関係を q=1 としただけのものである.

成分のみを書くのではなく、きちんとベクトルで(しかも3次元で)書けば

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}V(\boldsymbol{r}) = \left(-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z}\right) \quad \Leftrightarrow \quad V(x) = -\int_{C} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r}$$
 (12.2.12)

12.2. 電位 107

である. ここで \int_C は、曲線 C に沿って電場 E を線積分するという記号である.

線積分はともかく、電位 V は<u>スカラー</u>であることに注意して欲しい。力学でのポテンシャルエネルギーと同様である。このため電位には方向という概念がない。温度や高さなどと同じで、位置によって値が変化するだけで、向きは存在しない。

12.2.3 その他の電位の例

- 電気量 Q の点電荷が座標原点に置かれている場合の,位置 x での電位(ここでも 1 次元で考える)電場の x 成分が $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{x^2}\to V(x)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{x}$ $(x=\infty \ b = 0 \$
- 半径 a の金属球の表面に合計 Q の電気量の電荷が撒かれているとき (金属球の中心を座標原点とする)
 - 金属球の外部 : $V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x}$ (つまり、点電荷のケースと同じ)
 - 金属球の内部: $V(x)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a}=$ 一定 (金属中には電場がない.ということは $E=-\frac{dV}{dx}=0$ よりE=一定である.)

12.2.4 電位の重ね合わせ

いくつかの電荷によって、 V_1, V_2, \cdots という電位が空間に作られているときは、その合計の電位は ただ足すだけでよく

$$V = V_1 + V_2 + \dots {(12.2.13)}$$

でよい. 電場のときも式自体は

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \cdots \tag{12.2.14}$$

だから単なる足し算に見えるが、電場はベクトルなので実際に足すときは矢印の合成になる.といっても成分まで分解して書くなら

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \tag{12.2.15}$$

$$= \mathbf{E}_{1} + \mathbf{E}_{2} + \dots = \begin{pmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \\ E_{1z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{2x} \\ E_{2y} \\ E_{2z} \end{pmatrix} + \dots$$
 (12.2.16)

$$= \begin{pmatrix} E_{x1} + E_{x2} + \cdots \\ E_{y1} + E_{y2} + \cdots \\ E_{z1} + E_{z2} + \cdots \end{pmatrix}$$
 (12.2.17)

のように各成分はスカラーだから、ただ数を足すだけのことである.

このときに電荷 q がどれだけのポテンシャルエネルギーを持っているかだが,それを知りたければここまで運んでくるのにとれだけ大変か,つまり仕事をしなければいけないかを考えればいい.どこから運んでくるかによってどれだけ仕事をしなければいけないかは当然変わってくるが,今は $x=\infty$,つまり無限遠から運んでくるものとしよう.というのも,無限遠ではクーロン力は届かなくなって,そこに置かれた電荷は動くことがない.ちょうど地面に置かれた物体なら落下することがないのと同じで,基準とするのに向いている感じがするからである.5

電荷 q が位置 x にあるときは、外向きにクーロン力 $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{x^2}$ を受けるのだから、これに逆らって動かすためには同じ大きさの力を -x 方向に加える必要がある。ややこしいのは、電荷が動くとそれにつれて中心にある電荷との距離 x が変わるので、それに応じて力も変化させなければいけないということだが、微小距離 Δx の間はほとんど力は変化しないだろうから、その間に必要な仕事は

$$\Delta W \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{x^2} \Delta x \tag{12.2.18}$$

だと近似できるだろう。マイナスが付いているのは,力が -x 方向だからである。この Δx をどんどん 小さくしていけば,近似はますますよくなる。これを $\Delta x \to 0$ とする極限を取りつつ, $x = \infty$ から位置 x まで運ぶのに必要な仕事を足し集めればよい。これは積分のことだから

$$W = \int_{-\infty}^{x} dx' \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{x'^2} \tag{12.2.19}$$

12.3 磁場と電流の関係

12.3.1 磁荷と磁気量

磁気を帯びた物体のことを磁荷という.電荷には正イオンや陽子のように電気量が正だけのものや,電子のように負だけのものがあるが、よく知られているように磁石には必ず N 極と S 極がペアで現れ、

⁵あくまで「向いている感じがする」だけで、どこを基準とするかは全くの任意である.

12.3. 磁場と電流の関係 109

N 極だけの磁石や S 極だけの磁石は存在しない. 正と負(N と S)のペアになっているものを「双極子」(ダイポール),正負どちらか一方のものを「単極子」(モノポール)というが,磁石には単極子が存在しないのである.

電気量は C (クーロン) という単位で表されたが、磁気量は Wb (ウェーバー) で表す.

12.3.2 磁場と磁束密度

磁石の周りに砂鉄をまくと、磁石を取り囲むような模様が浮き上がる。このことから、目には見えないけれども磁石の周りには「磁場」という、磁石の力の影響が及んでいることがわかる。二つの磁石はくっつけなくても反発したり、引き合ったりするが、電気の力と同様で、離れたところに力が飛んでいるのではなく、

- 1. 磁石 A を置く
- 2. その周囲に磁場が発生する
- 3. 磁場中に別の磁石 B を置く
- 4. 磁石 B は磁場から力を受ける

と解釈すべきであることがわかる.

磁場は目に見えないが、磁力線でその様子を表すことができる。磁石の周りにまかれた砂鉄の描く模様が磁力線の様子そのものである。

磁場も定量化したいが、何しろ目に見えないので磁場中に置かれた磁荷がどんな力を受けるかからその大きさを数値化するしかない。そこで、磁気量 m [Wb] の磁荷が、磁場から F [N] という力を受けたなら、磁場 H は

$$H = \frac{F}{m} \Leftrightarrow F = mH$$
 (12.3.1)

だと判断する. 磁場と力は m 倍の違い敷かないので, 磁場も方向と大きさを持つベクトル場である.

この式からわかるように、磁場は力を磁気量で割ったものなので、単位は N/Wb(ニュートン毎ウェーバー)である。ただしこれは A/m に等しいことが計算からわかるので、標準的には A/m(アンペア毎メートル)を使う。

磁場に、透磁率と呼ばれる量 μ を掛けたものを磁束密度という. つまり

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{12.3.2}$$

である. 磁束密度の単位は Wb/m^2 であり、これを T (テスラ) という.

透磁率は、誘電率の磁力版のようなもので、磁石の力の伝わり易さの目安となるものである。物質ごとに異なるが、基準として真空の透磁率は

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \approx 1.26 \times 10^{-6} \text{ N/A}^2$$
 (12.3.3)

と定義されている. 真空の透磁率に対する何らかの物質の透磁率の比を比透磁率という.

比透磁率
$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$$
 (12.3.4)

である.6

12.3.3 磁場の作り方:ビオ・サヴァールの法則

磁石を置くことばかりが磁場を作る方法ではない。中学の理科で学ぶように、電流を流すとその周りを取り囲むように磁場が発生することは知っているだろう。電流で作る電磁石の方が、永久磁石よりも強さなどをコントロールし易い。そこで実用的には、電流でもって磁場を作ることの方が多い。7

磁場は電流の流れによって作られる. 微小な電流が作る磁場がどんなものになるかは, ビオ・サヴァールの法則にまとめられている.

図 12.3 のように、位置 \mathbf{r}' に電流 I が流れているとしよう。このとき、位置 \mathbf{r}' の近くの微小長さ $d\mathbf{r}'$ に電流を掛けた

$$Id\mathbf{r}' \tag{12.3.5}$$

を電流素片という. この電流素片が、別の場所rに作る微小な磁場は

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{Id\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$
(12.3.6)

である.これがビオ・サヴァールの法則である.「×」はこれまで通りベクトル積を表す.

磁束密度は磁場に透磁率を掛けたものなので、真空中でのビオ・サヴァールの法則を磁束密度で書けば

$$d\mathbf{B} = \mu_0 d\mathbf{H} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$
(12.3.7)

となる.

12.3.4 アンペールの法則

ビオ・サヴァールの法則は、「微小な電流が作る,微小な磁場」がどんなものかをまとめたものだが,微小な磁場を足し集めれば大きな磁場(というか磁場全体)が決まる。そうした,磁場 H と電流 I との大域的な関係を式にまとめたのがアンペールの法則である。

 6 自然界に存在する物質の透磁率は正だが,LC 回路をいくつも組み合わせた人工の構造体の中には透磁率が負のものもある。負の誘電率を持つ物質もあり,これら二つをうまく組み合わせると「負の屈折率」を持つ構造物を作ることができる。これは Negative Refractive Index Metamaterial と呼ばれ,光学迷彩への応用があるということで近年盛んに研究されている。 7 そもそも,磁力の原因とは何なのだろうか?永久磁石は何で磁力を持つのだろう?磁石にくっつく物質と,くっつかない物質の違いは何だろう?

電流から磁場が作られるという事実から想像すると、「永久磁石の磁気の素も、電流なのでは?」という発想に行き着く、電流の正体は電荷の移動だから、「磁石の中で電荷が動いているのではないか?」ということである。古典的にはこれで正しい、量子論まできちんと考えると、実は磁石内の磁力の正体は電子のスピン(自転のようなもの)である。自転のような回転運動が磁気の発生源なので、回転面に対して上下が決まる。磁石には常に正負がペアで現れ、双極子的になるのはこれが原因である。くっつく物質とくっつかない物質の違いはスピンの向きが揃っているかどうかによる。詳しくは統計力学と量子力学で学ぶ。

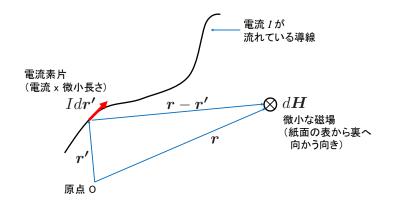


図 12.3: ビオ・サヴァールの法則. 微小な電流が作る磁場の向きと大きさをまとめた法則である.

こういうと難しく聞こえるが、これは、中学のときに習った、「電流を流すと、それを取り囲むように 磁場が発生する」ということを数式に落とし込んだものに過ぎない。中学までと違って定量化しないと いけないので、どのくらいの電流があればどのくらいの磁場が発生するかが重要だが、結論は

電流 I があると、それを取り囲むように磁場が発生し、その大きさは I に比例するという単純なものである(図 12.4).

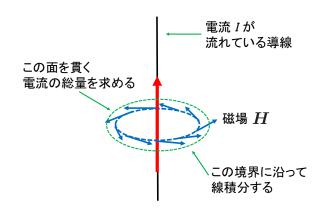


図 12.4: アンペールの法則. 電流と、それを取り囲むように発生する磁場との関係をまとめた法則である.

数式では,

が閉じているものである.

$$\oint_{\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int_{S} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = I \tag{12.3.8}$$

となる. ここで左辺にある ∂S は, S という領域の周を表す記号で,

$$\oint_{\partial S} m{H} \cdot dm{r} = 磁場 \, m{H} \,$$
の $\partial S \,$ に沿う成分を $, \, \partial S \,$ に沿って全て足し集める

という意味である. 8 また, j は電流密度といい,定義は,単位面積辺りの電流量である.つまり,電流を導線の断面積で割ったものに電流の方向まで考えたものだ.なので,真ん中の辺と右辺は,ある断面 8 このような,何か閉じた線に沿って 1 周積分することを周回積分という.前に少し出てきた線積分のひとつで,積分経路

を貫いている電流密度があって、それを面積で積分すれば、断面を貫く総電流量 I がわかるよ、という意味である.

磁束密度で書けば、また H に透磁率を掛けて

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_{S} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I \tag{12.3.9}$$

となる.9

電流と磁場の例

ビオ・サヴァールの法則, またはアンペールの法則を使って求められる磁場の例として, 高校物理でも取り上げられる以下の3例をあげておく.

- (1) I[A] の直線電流の周りに発生する磁場(直線電流は無限に長いと近似できるとする)
 - 向き:電流の向きに進む右ねじが回転する方向
 - 大きさ:電流から距離 r [m] のところでは, $H = \frac{I}{2\pi r}$ [A/m]
- (2) 半径 r [m] の円形回路に I [A] の電流を流したとき,回路中央にできる磁場
 - 向き:電流の向きを右ねじの回転方向とするとき,右ねじが進む方向
 - 大きさ: $H = \frac{I}{2r}$
- (3) 巻き数 N, 長さ ℓ [m] のソレノイドコイルに I [A] の電流を流したときコイル内部に発生する磁場(コイルの中心だけではない)
 - 向き:コイルに流れる電流の向きを右ねじの回転方向とするとき、右ねじが進む 方向
 - 大きさ: $H = \frac{N}{\ell}I = nI$ [A/m] (n は単位長さ当たりのコイルの巻き数)

12.4 電磁誘導

12.4.1 電磁誘導の概略

電流が流れるとその周りを取り囲むように磁場が発生する.では逆もまた然りかというと微妙に違う.磁場が変化すると、その磁場の変化を妨げるような別の磁場を作り出すべく、電流が流れるのである.

より正確には,この現象は

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{i} \tag{12.3.10}$$

となる. 変位電流まで含めた、完全な形(マクスウェル・アンペールの法則) は

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right)$$
 (12.3.11)

となる.

⁹微分形で書けば

12.4. 電磁誘導 113

磁束が変化すると、その変化を妨げる向きの新しい磁束を作るような電流を作るための、起 電力が発生する

と述べることができる. この現象は電磁誘導と呼ばれる. ここで, 磁束とは磁場の様子を表す線, つまり「磁力線」が束になったものだと思えばよい. 単位は Wb であり, 磁気量と同じである.

これまで磁束密度という量がよく出てきたが、これは、磁束 Φ と磁束密度の大きさ B には

$$\Phi = BS \tag{12.4.1}$$

という関係があるからである.ここでSは磁束が貫いている回路の断面積である.

電磁誘導はひと言で言えば「あまのじゃく」である。磁束が減ろうとすると増やそうとし、磁束が増えると減らそうとするからである。何かの平衡状態に落ち着こうとする働きとも見ることができるが、一般的に自然は電磁誘導のような性質を持っている。何かと急激な変化を嫌うのである。質量があるのもそうだ。なぜなら、物体の加速度は質量に反比例するからである。慣性モーメントも同様で、回転の状態を変えまいとする働きを持っている。このように、自然界には必ずブレーキの役割をするものがある。おかげでこの世界は崩壊を免れているのかもしれない。そうしたブレーキとも言える電磁誘導を発電として使うことで楽をしようというのだから。我々人間というのは実にしたたかな生き物である。

12.4.2 電磁誘導の法則

電磁誘導の性質は、レンツの法則とファラデーの法則の二つにまとめられている。レンツの法則はすでに述べた、電磁誘導の「あまのじゃくなところ」を言ったもので、

レンツの法則:磁束が変化すると,その変化を妨げる向きに誘導起電力が発生する とまとめられている.詳しく言えば,

磁束が変化すると、磁束の変化を妨げるような新しい磁束が生まれるように電流を流すべく、 誘導起電力が発生する

であった.

ファラデーの法則はこの誘導起電力が具体的にいくらなのかを表すもので,

ファラデーの法則:
$$V = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

と書かれる. N は磁束が貫いている回路の巻き数である. コイルのように何巻きかしているものを貫いていると思えばいい.

ここからわかるように、磁束の時間変化が激しければ激しいほど、大きな誘導起電力、すなわち電圧が発生する. コイルに磁石を出し入れする速度を大きくするとかやり方はいろいろあるが、磁束の変化が急激だとそれを嫌うように、誘導起電力が発生して磁束を元に戻そうとするのである.

電磁誘導も,電場と磁場の関係として書くことができる. なぜなら,誘導起電力が発生したということは電位差ができたということであり,そこに電場があるはずだからである. 数式では

積分形 :
$$\oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \int_{S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$
 (12.4.2)

微分形 :
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$
 (12.4.3)

と書ける.

それぞれの積分が何を表すのかとか、積分形では時間の常微分なのに、微分形では時間が何で偏微分になるのかとかいろいろあるのだが、その辺については別の機会に説明させて欲しい.

12.4.3 ローレンツカ

電荷は電場から力を受ける。それ以外にも、動いている電荷は磁場からも力を受ける。電荷が磁場から受ける力をローレンツ力という。電流の流れている導線を磁場中に置くと力を受けるが、この力は導線中の電荷が受けるローレンツ力の集合である。

電荷の速度をvとし、磁場の磁束密度をBとするとき、電気量qの電荷が受けるローレンツ力はベクトル積で表すことができ、

$$f = q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{12.4.4}$$

となる. ベクトル積の性質からも分かるが、ローレンツ力の向きは図 12.5 の通りであり、ローレンツ力は速度 v と磁束密度 B が張る平面に垂直な方向である. 大きさは、v と B のなす角を θ とするとき、再びベクトル積の性質から

$$|\mathbf{f}| = q|\mathbf{v}||\mathbf{B}|\sin\theta \tag{12.4.5}$$

であることもわかる. なお、電場から受けるクーロン力は $\mathbf{f} = q\mathbf{E}$ なので、二つの力を合わせて書くと (別に合わせなくてもいいのだが)、

$$\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{12.4.6}$$

となる.

12.5 マクスウェル方程式と電磁波

12.5.1 マクスウェル方程式

これまでに述べてきた電磁気の法則は、マクスウェル方程式と呼ばれる4本の方程式にまとめることができる。表し方には積分形と微分形の二つがある。

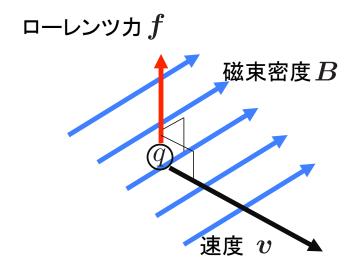


図 12.5: 動く電荷が磁場から受けるローレンツ力. 磁場 $m{H}$ と磁束密度 $m{B}$ は透磁率を μ_0 として $m{B}=\mu_0 m{H}$ という関係にある.

積分形のマクスウェル方程式 10

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V} \rho dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$$
(12.5.1)

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{12.5.2}$$

$$\oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \int_{S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\int_{S} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$
(12.5.3)

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_{S} \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$
(12.5.4)

微分形のマクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{12.5.5}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{12.5.6}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{12.5.7}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right)$$
 (12.5.8)

マクスウェル方程式は電場や磁場が満たす法則だが、そうした電場や磁場の中に他の物体が入ったときにどうなるかにも興味がある。電荷は電場中ではクーロン力を受けるし、磁場中を動くとローレンツ力を受ける。それらはまとめると

$$F = q \left(E + v \times B \right) \tag{12.5.9}$$

と表すことができる. q が電荷の電気量, v が電荷の速度である. これらの式で,電磁場(電場と磁場をまとめてこのように表現する)とその中でのテスト電荷の運動を考えることができる. 11

¹⁰線積分と面積分については付録に簡単なまとめを載せておいた.図もない、計算法だけのものなので申し訳ないのだが、 興味のある人は眺めてみてほしい.詳しく知りたい人はぜひ質問に来て下さい.

¹¹もう一つ,電荷保存則に相当する**連続の方程式**を考えることもある.具体的にはマクスウェル方程式の右辺に入っている

12.5.2 電磁波

マクスウェルは自身がまとめた方程式を使い,電磁波の存在を導き出した.電磁波とは,電場と磁場が互いに互いを生成しながら進んで行く波のことで,真空中のマクスウェル方程式から導かれる.計算の詳細は付録に回すが,具体的には,マクスウェル方程式で電荷密度 ρ と電流密度 j をゼロとし,それらを組み合わせることで

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \nabla^2 \mathbf{E} = 0 \tag{12.5.11}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \nabla^2 \mathbf{B} = 0 \tag{12.5.12}$$

が得られる. ここで

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \tag{12.5.13}$$

と書き、さらに話を1次元 (x 方向) のみに限ると、例えば電場の式から

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = 0 \tag{12.5.14}$$

を得る. これを波動方程式という. 電場に限らず, 一般に

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \tag{12.5.15}$$

も波動方程式という.

名前の由来は, 高校物理で学習する正弦波

$$y(x,t) = A\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \alpha\right\}$$
 (12.5.16)

が、同じ方程式に従うからである. つまり

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \tag{12.5.17}$$

が成り立つ. ここで, T は波の周期, λ は波の波長で, 波の速さ v は $v = \lambda/T$ を満たす.

なお, 方程式 (12.5.15) の一般解は

$$f(x,t) = A_1 f_1(x-ct) + A_2 f_2(x+ct)$$
 (A₁, A₂は任意の定数) (12.5.18)

となる(ダランベールの解). ここで, $f_1(x-ct)$ は速さ c で +x 方向に進む解, $f_2(x+ct)$ は -x 方向に進む解を表す. それら二つの線形結合が一般解である.

こうして、電場は波として空間を伝わっていくことがわかる。磁場についても同様である。これを電磁波という。計算は省略するが、図 12.6 のように、電場と磁場は互いに直交する方向に振動しながら伝わっていく。

電荷密度 ρ と電流密度 j について

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0 \tag{12.5.10}$$

という関係があるというものである. 電荷密度の時間変化と、電流の湧き出しを足したものはいつでもゼロになるという意味で、「電流は電荷の流れだから、どこかに電流が流れ出したなら、その分どこかの電気量が減少しているはずだ」という意味である.

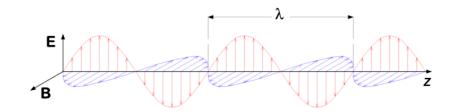


図 12.6: 電磁波の伝播. 電場 E と磁場(正確には磁束密度)B は直交し、さらにそれら二つに直交する方向に波は進む、図は wikimedia.commons より.

その速さは、波の式 (12.5.15) と電場が従う波動方程式 (12.5.14) を見比べることで c だとわかる. ここで c の定義式に真空の誘電率と真空の透磁率の値を代入してみると

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 2.99792 \times 10^8 \approx 30 \,\text{F km/s}$$
 (12.5.19)

を得る. 秒速 30 万 km もの凄まじい速さで電磁波が進むことがわかったのだが,この「秒速 30 万 km」という数値から,マクスウェルは「電磁波 = 光」であることを見抜いた. 12

12.5.3 電磁波と光

目に見える光を可視光というが、マクスウェルによってこれが電磁波の一種であることがわかった.電磁波は波なので、その特徴は波長や振動数で表される.可視光の波長はおよそ 400 nm ~ 800 nm である.可視光にもいろんな色があるが、日本ではそれを「虹の七色」と表現する.¹³

波長の一番長いものが赤く、波長の一番短いものが紫に見える.赤色の光よりも波長が長くなった電磁波が赤外線である.これは目に見えない電磁波だが、熱として感じることができる.赤外線よりさらに波長が長くなるとマイクロ波、さらに長くなったものがラジオやテレビで使われる電波である.

逆に、紫色よりも波長が短い電磁波は紫外線という。これも目に見えないが、日焼けの原因になるので、その存在を間接的に知ることはできる。紫外線よりもさらに波長が短いものが X 線、それよりももっと波長が短いものがガンマ線と呼ばれる. 14 それぞれの大まかな波長や、より細かい分類は理科年表などを参照して欲しい。

 $^{^{-12}}$ 光が秒速 30 万 km で進むことを突き止めたフィゾーの実験を知り、この結論に達した。

¹³虹が何色に見えるか、全部で何色あるとされるかは国ごとに異なる。物理的に決まるものでも生物学的に決まるものでもなく、国ごとの慣習によって異なる。つまり文化なのだ。ちなみに日本でも、古代では「虹は五色」と言っていた。虹を七色と言い出したのはニュートンらしい。

 $^{^{14}}$ ガンマ線の方が X 線よりも波長が短く,エネルギーが高いことが多いので,波長で分類してしまうことも多いが,正確には電子の状態変化によって発生するものを X 線,原子核の状態変化によって発生するものをガンマ線という.

付 録 A 線積分と面積分

電磁気学では線積分と面積分を多用する.そこで現れる計算は、無限に長い導線に電荷が分布しているときの周囲の電場を求めるものや、金属球面状に電荷が分布しているときの電場を求めるものだが、それらは対称性が高すぎて、より一般的な場合の線積分や面積分の計算方法がわからず、線積分や面積分は結局何だったのかがわからないままになってしまうという面がある.このことが回り回って、電磁気学を余計に理解しにくくしてしまう.そこで一旦電磁気学の設定から離れて、線積分と面積分の基本を習得してしまうことを勧める.

線積分はx方向だけに沿って「まっすぐ積分する」通常の1次元積分を一般化し,xy 平面中の曲線に沿って行う積分である。ナイーブなイメージとしては,カーテンのようにヒダのあるものの面積を求めるようなものだと思えばいい。まっすぐピンと張ったものの面積と,ヒダのあるものの面積とでは違って当然だし,ヒダに沿ってきちんと積分してやらないと面積を正確に出せない。その際にポイントとなるのは,積分するときに使う曲線をどうやってパラメーターで表示するかにある。

一方,面積分は2重積分の拡張で,例えば地球の表面のような,曲面上で行う2重積分である.面積分のポイントは曲面上の微小面積素をどうやって計算するかにある.

A.1 線積分

A.1.1 スカラー場の線積分

曲線 C が、 $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)), (a \leq t \leq b)$ で表されているとする.このとき、スカラー場 f(x,y,z)=f(x(t),y(t),z(t)) に対して

$$\int_C f dt = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) dt \tag{A.1.1}$$

を、曲線 C に沿ったスカラー場の線積分という。代表的な性質としては

• 分割可能:曲線Cが曲線 C_1 と C_2 に分割できるとき,積分も分割できて

$$\int_{C} f dt = \int_{C_1} f dt + \int_{C_2} f dt \tag{A.1.2}$$

となる(普通の1次元積分と同じ).

• 曲線を逆向きに積分すると,積分結果にはマイナスがつく.:曲線 C を a から b でなく逆に b から a にたどった曲線を -C と書くことにすると

$$\int_{-C} f dt = -\int_{C} f dt \tag{A.1.3}$$

となる.

• 積分の始点と終点が同じでも、経路が異なると積分結果が異なる.

などがある.特に曲線の始点と終点が一致している閉曲線のときは

$$\oint_C f dt \tag{A.1.4}$$

と書いて、周回積分や閉積分と呼ぶことも覚えておくとよい.

[例題 1]

 $C: y = 3x \ (0 \le x \le 1)$ に沿う線積分

$$\int_{C} xy^{2}dt \tag{A.1.5}$$

を求めよ.

[解答例]

ステップ1:曲線Cのパラメーター表示

曲線(今の場合は直線だが)をパラメーター表示(媒介変数表示)する. C は y=3x $(0 \le x \le 1)$ だから、

$$r(t) = (t, 3t) \ (-1 \le t \le 1)$$
 (A.1.6)

となる.

ステップ2:被積分関数のパラメーター表示と積分の実行

曲線 C 上の任意の点 (x,y) は x=t, y=3t とパラメーター表示されているから,

$$f(x,y) = xy^2 = t \cdot (3t)^2 = 9t^3 \tag{A.1.7}$$

となる. これを使って積分を実行すると

$$\int_C xy^2 dt = \int_0^1 9t^3 dt \tag{A.1.8}$$

$$= \left[\frac{9}{4}t^4\right]_0^1 = \frac{9}{4} \tag{A.1.9}$$

となる.

A.1. 線積分 121

A.1.2 弧長パラメーターによる線積分

曲線の長さのことを弧長という.曲線 C をパラメーター表示したものを $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ とすると,この曲線に沿ってパラメーターを t=a から t=b まで動かしたとき,C が描く弧長 s は

$$s = \int ds \tag{A.1.10}$$

$$= \int_{a}^{b} \frac{ds}{dt} dt \tag{A.1.11}$$

$$= \int_{a}^{b} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt \tag{A.1.12}$$

で与えられる. この式の中にもあるように、曲線tと弧長とは

$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \tag{A.1.13}$$

という関係にある. ここで、 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ は曲線 $\mathbf{r}(t)$ に接するベクトルとして理解できる.

[例題 2]: 弧長パラメーターでの線積分

 $C: y = 3x (0 \le x \le 1)$ に沿う弧長に関する線積分

$$\int_C xy^2 ds \tag{A.1.14}$$

を求めよ.

ステップ1:曲線Cをパラメーター表示し、弧長sを求める

曲線(今の場合は直線だが)をパラメーター表示(媒介変数表示)するところは前問と同様で

$$\mathbf{r}(t) = (t, 3t) \ (-1 \le t \le 1)$$
 (A.1.15)

となる. これより, Cの接ベクトルは $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (1,3)$ なので, (A.1.13) を使うと

$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \tag{A.1.16}$$

がわかる.

ステップ2:積分の実行

前問と同様に被積分関数をパラメーターtで表して積分する。ただし今回はsでの積分なので変数変換を行う:

$$\int_C xy^2 ds = \int_C xy^2 \frac{ds}{dt} dt \tag{A.1.17}$$

$$= \int_0^1 9t^3 \sqrt{10} dt \tag{A.1.18}$$

$$= \left[\frac{9}{4}t^4\right]_0^1 \cdot \sqrt{10} = \frac{9\sqrt{10}}{4} \tag{A.1.19}$$

このように、tで積分したものとsで積分したものは答えが違うことに注意せよ.

A.1.3 ベクトル場の線積分

曲線 C が弧長をパラメーターとして $\boldsymbol{r}(s)=(x(s),y(s),z(s))$ で与えられているとする.このとき,ベクトル場

$$\mathbf{A} = (A_x(s), A_y(s), A_z(s))$$
 (A.1.20)

に対して

$$\int_{C} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \tag{A.1.21}$$

をベクトル場に関する線積分という。ここで、t を曲線に関する接単位ベクトルとすると、単位ベクトルの定義から

$$t = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|} \tag{A.1.22}$$

なので、微小変位 dr に対し

$$tds = dr (A.1.23)$$

が成り立つ. よって (A.1.21) は

$$\int_{C} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} ds \tag{A.1.24}$$

とも書ける.こうするとわかるように,ここで積分されている量 $A \cdot t$ は,ベクトル場 A の曲線 C に沿う成分

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{t} = A_t \tag{A.1.25}$$

である.

[例題]

曲線 $C: y = x^2 \ (0 \le x \le 1)$ に沿って、ベクトル場 $\mathbf{A} = (xy, x + y)$ の線積分

$$\int_{C} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \tag{A.1.26}$$

を求めよ.

[解答例]

ステップ1:曲線Cのパラメーター表示

 $y = x^2 \ (0 \le x \le 1) \ \& \ \emptyset$,

$$\mathbf{r}(t) = (t, t^2), \ 0 \le t \le 1$$
 (A.1.27)

である. 接ベクトルは

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (1, 2t) \tag{A.1.28}$$

ステップ2:積分の実行

A.2. 面積分 123

ベクトル場はこの曲線上ではパラメーター t を使って $\mathbf{A}=(xy,x+y)=(t^3,t+t^2)$ なので,積分を実行すると

$$\int_{C} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C} \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt \tag{A.1.29}$$

$$= \int_0^1 (t^3, t + t^2) \cdot (1, 2t) dt \tag{A.1.30}$$

$$= \int_0^1 (t^3 \cdot 1 + (t+t^2) \cdot 2t) dt$$
 (A.1.31)

$$= \int_0^1 (2t^2 + 3t^3)dt \tag{A.1.32}$$

$$= \frac{17}{12} \tag{A.1.33}$$

となる.

A.2 面積分

A.2.1 スカラー場の面積分

2 変数 u,v をパラメーターとする曲面 S: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ 上で定義されたスカラー場 f(x,y,z) に対し,

$$\int \int_{S} f dS = \int \int_{S} f\left(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\right) dS \tag{A.2.1}$$

を f の面積分という. ここで dS は曲面上の微小面積素であり,

$$dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dudv \tag{A.2.2}$$

で定義されている.

[例題]

円柱の側面

$$S: x^2 + y^2 = 1, \ 0 \le z \le 1$$
 (A.2.3)

上で定義されるスカラー場 f(x,y,z) = x + y + z の面積分

$$I = \int \int_{S} (x+y+z)dS \tag{A.2.4}$$

を求めよ.

[解答例]

ステップ1:曲面のパラメーター表示

まず、曲面 S をパラメーター表示する. S の形状から言って、円柱座標を用いるのが便利である. S は半径 1 の円柱の側面だから、これをパラメーター表示すると

$$r = r(\varphi, z)$$

= $\cos \varphi e_x + \sin \varphi e_y + z e_z$ (A.2.5)

となる. ただし, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le z \le 1$ である.

ステップ2: 微小面積素を求める

次に曲面上の微小面積素 dS を求める. パラメーターは φ と z だから, それぞれで r を微分して,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y, \tag{A.2.6}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{e}_z \tag{A.2.7}$$

を得る. これより,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y \tag{A.2.8}$$

なので, 結局

$$dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right| d\varphi dz = 1 \cdot d\varphi dz \tag{A.2.9}$$

がわかる.

ステップ3:面積分の実行

これまで求めた量を使って面積分を実行する. まず、曲面のパラメーター表示で求めたように、曲面 S上では

$$x = \cos \varphi, \ y = \sin \varphi, \ z = z$$
 (A.2.10)

となっているから, スカラー場が

$$f = x + y + z = \cos \varphi + \sin \varphi + z \tag{A.2.11}$$

と表示できることがわかる. これを使って、

$$I = \int \int_{S} (x+y+z)dS \tag{A.2.12}$$

$$= \int \int_{S} (x+y+z) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right| d\varphi dz \tag{A.2.13}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\cos \varphi + \sin \varphi + z) \cdot 1 \cdot d\varphi dz \tag{A.2.14}$$

$$= \pi \tag{A.2.15}$$

のように面積分を求めることができる.

A.2. 面積分 125

A.2.2 ベクトル場の面積分

曲面 S: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ 上で定義されたベクトル場

$$A(x, y, z) = A_x(x, y, z)e_x + A_y(x, y, z)e_y + A_z(x, y, z)e_z$$
(A.2.16)

に対し,

$$\int \int_{S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int \int_{S} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \tag{A.2.17}$$

$$= \pm \int \int_{S} \mathbf{A} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv \tag{A.2.18}$$

を S 上での A の面積分という。ここで n は曲面上の微小面積素 dS に垂直な単位ベクトルである。向きは曲面をどちら方向に貫くかで正負の 2 種類がある。n がどちらを向いているかは考えている状況ごと(問題ごと)に違うので,適宜選べばよい。

ところで上の式によると

$$ndS = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) dudv \tag{A.2.19}$$

が成り立っているようだが,これは以下のようにして示せる.まず,曲面の面積のところでやったように,曲面上の微小面積素 dS はベクトル $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ が張る平行四辺形の面積に等しい.ここでこの 2 つのベクトルのベクトル積 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ はベクトル積の性質から 2 つのベクトル $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ のどちらにも垂直である.つまり,微小な平行四辺形,つまり微小面積素に対して $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ は垂直であることがわかる.よって正負のどちらかは決まらないけれども,

$$\boldsymbol{n} = \pm \frac{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|} \tag{A.2.20}$$

がいえる. これと, 前節のスカラー場の面積分で学んだ dS の定義を組み合わせれば

$$ndS = \pm \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|} \cdot \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| dudv$$
(A.2.21)

$$= \pm \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) du dv \tag{A.2.22}$$

だとわかる.

[例題]

3次元空間の原点に置いた電荷 q が位置 r に作る電場 E(r) は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{A.2.23}$$

である.ここで $r=|{m r}|$ であり, $arepsilon_0$ は真空の誘電率である.これに対し,半径 a の球面 S を垂直外向きに貫く電場の総量

$$\int \int_{S} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS \tag{A.2.24}$$

を求めよ、ここで n は曲面 S に対し、外向き(表面から原点とは逆向きに向かう方向)で垂直な単位ベクトルである。

[解答例]

ステップ1:曲面のパラメーター表示

曲面の形状が半径 a の球面なので、3次元極座標を用いて曲面をパラメーター表示する. 具体的には

$$x = a \sin \theta \cos \varphi, \ y = a \sin \theta \sin \varphi, \ z = a \cos \theta$$
 (A.2.25)

より,

$$r = r(\theta, \varphi) = a \sin \theta \cos \varphi e_x + a \sin \theta \sin \varphi e_y + a \cos \theta e_z$$
 (A.2.26)

となる.

ステップ2:微小面積素と法単位ベクトルを求める

パラメーター表示から,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = a^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + a^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + a^2 \sin \theta \cos \theta \mathbf{e}_z \tag{A.2.27}$$

が求まる. これより大きさは

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right| = a^2 \sin \theta \tag{A.2.28}$$

だとわかる. よって、曲面に垂直な単位ベクトルは

$$\boldsymbol{n} = \pm \frac{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}}{\left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} \right|}$$
(A.2.29)

$$= \pm (\sin\theta\cos\varphi e_x + \sin\theta\sin\varphi e_y + \cos\theta e_z)$$
 (A.2.30)

$$= \pm \frac{\mathbf{r}}{a} \tag{A.2.31}$$

と決まる. このベクトルは $\theta=0$ を代入してみると (つまり極座標での北極にあたる点でのn を見てみ ると)

$$\boldsymbol{n} = \pm \boldsymbol{e}_z \tag{A.2.32}$$

がわかるから,正の方が外向き単位ベクトルだとわかる.

ステップ3:面積分の実行

曲面 S 上では $|\mathbf{r}| = r = a$ だから,

$$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \boldsymbol{r} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{r}}{a}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \frac{r^2}{a} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$
(A.2.33)

である. よって求める面積分は

$$\int \int_{S} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{\pi} d\theta \frac{q}{4\pi\varepsilon_{0}a^{2}} \cdot a^{2} \sin\theta \qquad (A.2.34)$$

$$= \frac{q}{\varepsilon_{0}} \qquad (A.2.35)$$

$$= \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{A.2.35}$$

A.2. 面積分 127

例題

電位 V と電場 E の関係

$$V = -\int E dx \quad \Leftrightarrow \quad E = -\frac{dV}{dx}$$
 (A.2.36)

などを用い,以下の問いに答えよ.

問1 電位と電場(1次元,一様な電場の場合)

x 軸の正の方向に、一様で大きさ E の電場があるとき、以下の問いに答えよ.

- (1) この電場中に置かれた、電気量 q の電荷が電場から受ける力の大きさはいくらか.
- (2) この電場による電位 V(x) を求めよ、ただし、 $x=x_0$ を電位の原点(基準点)とせよ、
- (3) 前問の電場中で,位置 $x = x_1$ にある電気量 q の電荷と,位置 $x = x_2$ にある電気量 q の電位差を求めよ. ただし $x_1 < x_2$ とする.
- (4) $x=x_1$ に電気量 q, 質量 m の電荷を置いたところ, x 軸の正の方向に向かって進み出した. この電荷が $x=x_2$ に到達したときの速さ v はいくらか.

問2 電位と電場(1次元,点電荷が作る電場の場合)

座標原点に、電気量 Q の点電荷が置かれている. Q は正とする. この電荷が作る電場と電位について、以下の問いに答えよ.

- (1) 電荷 Q が位置 x に作る電場の大きさと向きを答えよ.
- (2) 位置 x における電位を求めよ. ただし $x = \infty$ を電位の原点(基準点)とせよ.
- (3) $x = \infty$ から,電気量 q,質量 m の点電荷を -x 方向に向かって速さ v_0 で打ち出した.q が正 であるとき,原点に置かれた電荷から斥力を受けるが,点電荷 q はどこまで近づくことができるか.Q に一番近づいた地点の座標を求めよ.

問3 点電荷が作る電場と電位(3次元の場合,試験範囲外)

1次元以上の場合,電場と電位の関係は

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V \quad \Leftrightarrow \quad V = -\int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r}$$

で与えられる. ここで、一般に f をスカラー関数として ∇f を「f の勾配(gradient)」という. 具体的には偏微分を用いて

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial y}, \ \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

と書ける,「スカラー関数から作られるベクトル量」である.例えば,f として $f(x,y,z)=x^2y+3z$ とすると,

$$\nabla f = (2xy, \ x^2, \ 3)$$

となる.1

これを用いて,電位

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

に対応する電場 E が

$$\boldsymbol{E}(x,y,z) = -\nabla V = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{x}{r}, \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{y}{r}, \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{z}{r}\right)$$

であることを求めよ. ここで r は位置ベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$ の大きさ

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

である.²

$$oldsymbol{e}_r = rac{oldsymbol{r}}{r}$$

を用いれば

$$\boldsymbol{E}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \boldsymbol{e}_r$$

と書くことができる. これは

大きさが
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$
で,原点から放射状外向きのベクトル

であり、確かに原点に置かれた点電荷が作る電場になっていることがわかる.

 $^{^{-1}}$ 偏微分とは、「その文字以外は定数だと思って微分する」という意味である. よって $\frac{\partial f}{\partial x}$ は、 f を、x 以外の文字は定数だと見なして、x で微分すればよい.

 $^{^2}$ なお,この式は位置ベクトル $\mathbf{r}=(x,y,z)$ 方向の単位ベクトル