付 録 A　線積分と面積分

電磁気学では線積分と面積分を多用する．そこで現れる計算は，無限に長い導線に電荷が分布しているときの周囲の電場を求めるものや，金属球面状に電荷が分布しているときの電場を求めるものだが，それらは対称性が高すぎて，より一般的な場合の線積分や面積分の計算方法がわからず，線積分や面積分は結局何だったのかがわからないままになってしまうという面がある．このことが回り回って，電磁気学を余計に理解しにくくしてしまう．そこで一旦電磁気学の設定から離れて，線積分と面積分の基本を習得してしまうことを勧める．

線積分は x 方向だけに沿って「まっすぐ積分する」通常の 1 次元積分を一般化し，xy 平面中の曲線に沿って行う積分である．ナイーブなイメージとしては，カーテンのようにヒダのあるものの面積を求めるようなものだと思えばいい．まっすぐピンと張ったものの面積と，ヒダのあるものの面積とでは違って当然だし，ヒダに沿ってきちんと積分してやらないと面積を正確に出せない．その際にポイントとなるのは，**積分するときに使う曲線をどうやってパラメーターで表示するか**にある．

一方，面積分は 2 重積分の拡張で，例えば地球の表面のような，曲面上で行う 2 重積分である．面積分のポイントは**曲面上の微小面積素をどうやって計算するか**にある．

A.1　線積分

A.1.1　スカラー場の線積分

曲線 C が，$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$，$(a \leq t \leq b)$ で表されているとする．このとき，スカラー場 $f(x,y,z) = f(x(t), y(t), z(t))$ に対して

$$\int_C f dt = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) dt \tag{A.1.1}$$

を，曲線 C に沿ったスカラー場の線積分という．代表的な性質としては

- 分割可能：曲線 C が曲線 C_1 と C_2 に分割できるとき，積分も分割できて
$$\int_C f dt = \int_{C_1} f dt + \int_{C_2} f dt \tag{A.1.2}$$
となる（普通の 1 次元積分と同じ）．

- 曲線を逆向きに積分すると，積分結果にはマイナスがつく．：曲線 C を a から b でなく逆に b から a にたどった曲線を $-C$ と書くことにすると
$$\int_{-C} f dt = -\int_C f dt \tag{A.1.3}$$

となる．

- 積分の始点と終点が同じでも，経路が異なると積分結果が異なる．

などがある．特に曲線の始点と終点が一致している閉曲線のときは

$$\oint_C f dt \tag{A.1.4}$$

と書いて，周回積分や閉積分と呼ぶことも覚えておくとよい．

[例題 **1**]

$C : y = 3x \ (0 \leq x \leq 1)$ に沿う線積分

$$\int_C xy^2 dt \tag{A.1.5}$$

を求めよ．

[解答例]

ステップ１：曲線 C のパラメーター表示

曲線（今の場合は直線だが）をパラメーター表示（媒介変数表示）する．C は $y = 3x \ (0 \leq x \leq 1)$ だから，

$$\boldsymbol{r}(t) = (t, 3t) \ (-1 \leq t \leq 1) \tag{A.1.6}$$

となる．

ステップ２：被積分関数のパラメーター表示と積分の実行

曲線 C 上の任意の点 (x, y) は $x = t, \ y = 3t$ とパラメーター表示されているから，

$$f(x, y) = xy^2 = t \cdot (3t)^2 = 9t^3 \tag{A.1.7}$$

となる．これを使って積分を実行すると

$$\begin{aligned} \int_C xy^2 dt &= \int_0^1 9t^3 dt && \text{(A.1.8)} \\ &= \left[\frac{9}{4}t^4\right]_0^1 = \frac{9}{4} && \text{(A.1.9)} \end{aligned}$$

となる．

A.1.2　弧長パラメーターによる線積分

曲線の長さのことを**弧長**という．曲線 C をパラメーター表示したものを $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ とすると，この曲線に沿ってパラメーターを $t = a$ から $t = b$ まで動かしたとき，C が描く弧長 s は

$$\begin{aligned} s &= \int ds \qquad \text{(A.1.10)} \\ &= \int_a^b \frac{ds}{dt} dt \qquad \text{(A.1.11)} \\ &= \int_a^b \left| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right| dt \qquad \text{(A.1.12)} \end{aligned}$$

で与えられる．この式の中にもあるように，曲線 $\boldsymbol{t}$ と弧長とは

$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right| \qquad \text{(A.1.13)}$$

という関係にある．ここで，$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ は曲線 $\boldsymbol{r}(t)$ に接するベクトルとして理解できる．

[例題 **2**]：弧長パラメーターでの線積分

$C : y = 3x \ (0 \leq x \leq 1)$ に沿う弧長に関する線積分

$$\int_C xy^2 ds \qquad \text{(A.1.14)}$$

を求めよ．

<u>ステップ１：曲線 C をパラメーター表示し，弧長 s を求める</u>

曲線（今の場合は直線だが）をパラメーター表示（媒介変数表示）するところは前問と同様で

$$\boldsymbol{r}(t) = (t, 3t) \ (-1 \leq t \leq 1) \qquad \text{(A.1.15)}$$

となる．これより，C の接ベクトルは $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (1, 3)$ なので，(A.1.13) を使うと

$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \qquad \text{(A.1.16)}$$

がわかる．

<u>ステップ２：積分の実行</u>

前問と同様に被積分関数をパラメーター t で表して積分する．ただし今回は s での積分なので変数変換を行う：

$$\begin{aligned} \int_C xy^2 ds &= \int_C xy^2 \frac{ds}{dt} dt \qquad \text{(A.1.17)} \\ &= \int_0^1 9t^3 \sqrt{10} dt \qquad \text{(A.1.18)} \\ &= \left[\frac{9}{4} t^4 \right]_0^1 \cdot \sqrt{10} = \frac{9\sqrt{10}}{4} \qquad \text{(A.1.19)} \end{aligned}$$

このように，t で積分したものと s で積分したものは**答えが違う**ことに注意せよ．

A.1.3 ベクトル場の線積分

曲線 C が弧長をパラメーターとして $\boldsymbol{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$ で与えられているとする．このとき，ベクトル場

$$\boldsymbol{A} = (A_x(s),\ A_y(s),\ A_z(s)) \tag{A.1.20}$$

に対して

$$\int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{A.1.21}$$

をベクトル場に関する線積分という．ここで，$\boldsymbol{t}$ を曲線に関する接単位ベクトルとすると，単位ベクトルの定義から

$$\boldsymbol{t} = \frac{\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}}{\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|} \tag{A.1.22}$$

なので，微小変位 $d\boldsymbol{r}$ に対し

$$\boldsymbol{t}ds = d\boldsymbol{r} \tag{A.1.23}$$

が成り立つ．よって (A.1.21) は

$$\int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{t}ds \tag{A.1.24}$$

とも書ける．こうするとわかるように，ここで積分されている量 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{t}$ は，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の曲線 C に沿う成分

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{t} = A_t \tag{A.1.25}$$

である．

[例題]

曲線 $C : y = x^2\ (0 \le x \le 1)$ に沿って，ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (xy, x + y)$ の線積分

$$\int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{A.1.26}$$

を求めよ．

[解答例]

ステップ 1 ：曲線 C のパラメーター表示

$y = x^2\ (0 \le x \le 1)$ より，

$$\boldsymbol{r}(t) = (t, t^2),\ 0 \le t \le 1 \tag{A.1.27}$$

である．接ベクトルは

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (1, 2t) \tag{A.1.28}$$

ステップ 2：積分の実行

ベクトル場はこの曲線上ではパラメーター t を使って $\boldsymbol{A}=(xy,x+y)=(t^3,t+t^2)$ なので，積分を実行すると

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_C \boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt &\text{(A.1.29)}\\ &= \int_0^1 (t^3,t+t^2)\cdot(1,2t)dt &\text{(A.1.30)}\\ &= \int_0^1 \left(t^3\cdot 1+(t+t^2)\cdot 2t\right)dt &\text{(A.1.31)}\\ &= \int_0^1 (2t^2+3t^3)dt &\text{(A.1.32)}\\ &= \frac{17}{12} &\text{(A.1.33)}\end{aligned}$$

となる．

A.2　面積分

A.2.1　スカラー場の面積分

2 変数 u,v をパラメーターとする曲面 S: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上で定義されたスカラー場 $f(x,y,z)$ に対し，

$$\int\int_S fdS=\int\int_S f\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right)dS \tag{A.2.1}$$

を f の面積分という．ここで dS は曲面上の微小面積素であり，

$$dS=\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right|dudv \tag{A.2.2}$$

で定義されている．

[例題]

円柱の側面

$$S: x^2+y^2=1,\ 0\le z\le 1 \tag{A.2.3}$$

上で定義されるスカラー場 $f(x,y,z)=x+y+z$ の面積分

$$I=\int\int_S (x+y+z)dS \tag{A.2.4}$$

を求めよ．

[解答例]

<u>ステップ 1 : 曲面のパラメーター表示</u>

まず，曲面 S をパラメーター表示する．S の形状から言って，円柱座標を用いるのが便利である．S は半径 1 の円柱の側面だから，これをパラメーター表示すると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}(\varphi, z) \\ &= \cos\varphi \boldsymbol{e}_x + \sin\varphi \boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z \end{aligned} \tag{A.2.5}$$

となる．ただし，$0 \leq \varphi \leq 2\pi$，$0 \leq z \leq 1$ である．

ステップ 2：微小面積素を求める

次に曲面上の微小面積素 dS を求める．パラメーターは φ と z だから，それぞれで $\boldsymbol{r}$ を微分して，

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} = -\sin\varphi \boldsymbol{e}_x + \cos\varphi \boldsymbol{e}_y, \tag{A.2.6}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} = \boldsymbol{e}_z \tag{A.2.7}$$

を得る．これより，

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} = \cos\varphi \boldsymbol{e}_x + \sin\varphi \boldsymbol{e}_y \tag{A.2.8}$$

なので，結局

$$dS = \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} \right| d\varphi dz = 1 \cdot d\varphi dz \tag{A.2.9}$$

がわかる．

ステップ 3：面積分の実行

これまで求めた量を使って面積分を実行する．まず，曲面のパラメーター表示で求めたように，曲面 S 上では

$$x = \cos\varphi,\ y = \sin\varphi,\ z = z \tag{A.2.10}$$

となっているから，スカラー場が

$$f = x + y + z = \cos\varphi + \sin\varphi + z \tag{A.2.11}$$

と表示できることがわかる．これを使って，

$$\begin{aligned} I &= \int\int_S (x+y+z) dS && \text{(A.2.12)} \\ &= \int\int_S (x+y+z) \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} \right| d\varphi dz && \text{(A.2.13)} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\cos\varphi + \sin\varphi + z) \cdot 1 \cdot d\varphi dz && \text{(A.2.14)} \\ &= \pi && \text{(A.2.15)} \end{aligned}$$

のように面積分を求めることができる．

A.2.2　ベクトル場の面積分

曲面 S: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ 上で定義されたベクトル場

$$\boldsymbol{A}(x,y,z) = A_x(x,y,z)\boldsymbol{e}_x + A_y(x,y,z)\boldsymbol{e}_y + A_z(x,y,z)\boldsymbol{e}_z \tag{A.2.16}$$

に対し,

$$\int\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \int\int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS \tag{A.2.17}$$

$$= \pm\int\int_S \boldsymbol{A}\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right)dudv \tag{A.2.18}$$

を S 上での $\boldsymbol{A}$ の面積分という．ここで $\boldsymbol{n}$ は曲面上の微小面積素 dS に垂直な単位ベクトルである．向きは曲面をどちら方向に貫くかで正負の 2 種類がある．n がどちらを向いているかは考えている状況ごと（問題ごと）に違うので，適宜選べばよい．

ところで上の式によると

$$\boldsymbol{n}dS = \left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right)dudv \tag{A.2.19}$$

が成り立っているようだが，これは以下のようにして示せる．まず，曲面の面積のところでやったように，曲面上の微小面積素 dS はベクトル $\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}$，$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}$ が張る平行四辺形の面積に等しい．ここでこの 2 つのベクトルのベクトル積 $\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}$ はベクトル積の性質から 2 つのベクトル $\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}$，$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}$ のどちらにも垂直である．つまり，微小な平行四辺形，つまり微小面積素に対して $\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}$ は垂直であることがわかる．よって正負のどちらかは決まらないけれども，

$$\boldsymbol{n} = \pm\frac{\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right|} \tag{A.2.20}$$

がいえる．これと，前節のスカラー場の面積分で学んだ dS の定義を組み合わせれば

$$\boldsymbol{n}dS = \pm\frac{\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right|}\cdot\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right|dudv \tag{A.2.21}$$

$$= \pm\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right)dudv \tag{A.2.22}$$

だとわかる．

[例題]

3 次元空間の原点に置いた電荷 q が位置 $\boldsymbol{r}$ に作る電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{A.2.23}$$

である．ここで $r = |\boldsymbol{r}|$ であり，ε_0 は真空の誘電率である．これに対し，半径 a の球面 S を垂直外向きに貫く電場の総量

$$\int\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dS \tag{A.2.24}$$

を求めよ．ここで $\boldsymbol{n}$ は曲面 S に対し，外向き（表面から原点とは逆向きに向かう方向）で垂直な単位ベクトルである．

[解答例]

ステップ 1：曲面のパラメーター表示

曲面の形状が半径 a の球面なので，3 次元極座標を用いて曲面をパラメーター表示する．具体的には

$$x = a\sin\theta\cos\varphi,\ y = a\sin\theta\sin\varphi,\ z = a\cos\theta \tag{A.2.25}$$

より，

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\theta,\varphi) = a\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_x + a\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_y + a\cos\theta\boldsymbol{e}_z \tag{A.2.26}$$

となる．

ステップ 2：微小面積素と法単位ベクトルを求める

パラメーター表示から，

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\varphi} = a^2\sin^2\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_x + a^2\sin^2\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_y + a^2\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{e}_z \tag{A.2.27}$$

が求まる．これより大きさは

$$\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\varphi}\right| = a^2\sin\theta \tag{A.2.28}$$

だとわかる．よって，曲面に垂直な単位ベクトルは

$$\boldsymbol{n} = \pm\frac{\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\varphi}}{\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\varphi}\right|} \tag{A.2.29}$$

$$= \pm\left(\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_y + \cos\theta\boldsymbol{e}_z\right) \tag{A.2.30}$$

$$= \pm\frac{\boldsymbol{r}}{a} \tag{A.2.31}$$

と決まる．このベクトルは $\theta = 0$ を代入してみると (つまり極座標での北極にあたる点での $\boldsymbol{n}$ を見てみると)

$$\boldsymbol{n} = \pm\boldsymbol{e}_z \tag{A.2.32}$$

がわかるから，正の方が外向き単位ベクトルだとわかる．

ステップ 3：面積分の実行

曲面 S 上では $|\boldsymbol{r}| = r = a$ だから，

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\boldsymbol{r}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{a}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\frac{r^2}{a} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \tag{A.2.33}$$

である．よって求める面積分は

$$\int\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi} d\theta\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\cdot a^2\sin\theta \tag{A.2.34}$$

$$= \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{A.2.35}$$

例題

電位 V と電場 E の関係

$$V = -\int E dx \quad \Leftrightarrow \quad E = -\frac{dV}{dx} \tag{A.2.36}$$

などを用い，以下の問いに答えよ．

問 1　電位と電場（1 次元，一様な電場の場合）

x 軸の正の方向に，一様で大きさ E の電場があるとき，以下の問いに答えよ．

(1) この電場中に置かれた，電気量 q の電荷が電場から受ける力の大きさはいくらか．

(2) この電場による電位 $V(x)$ を求めよ．ただし，$x = x_0$ を電位の原点（基準点）とせよ．

(3) 前問の電場中で，位置 $x = x_1$ にある電気量 q の電荷と，位置 $x = x_2$ にある電気量 q の電位差を求めよ．ただし $x_1 < x_2$ とする．

(4) $x = x_1$ に電気量 q，質量 m の電荷を置いたところ，x 軸の正の方向に向かって進み出した．この電荷が $x = x_2$ に到達したときの速さ v はいくらか．

問 2　電位と電場（1 次元，点電荷が作る電場の場合）

座標原点に，電気量 Q の点電荷が置かれている．Q は正とする．この電荷が作る電場と電位について，以下の問いに答えよ．

(1) 電荷 Q が位置 x に作る電場の大きさと向きを答えよ．

(2) 位置 x における電位を求めよ．ただし $x = \infty$ を電位の原点（基準点）とせよ．

(3) $x = \infty$ から，電気量 q, 質量 m の点電荷を $-x$ 方向に向かって速さ v_0 で打ち出した．q が正であるとき，原点に置かれた電荷から斥力を受けるが，点電荷 q はどこまで近づくことができるか．Q に一番近づいた地点の座標を求めよ．

問 3　点電荷が作る電場と電位（3 次元の場合，<u>試験範囲外</u>）

1 次元以上の場合，電場と電位の関係は

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V \quad \Leftrightarrow \quad V = -\int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r}$$

で与えられる．ここで，一般に f をスカラー関数として ∇f を「f の勾配（gradient）」という．具体的には偏微分を用いて

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

と書ける,「スカラー関数から作られるベクトル量」である．例えば，f として $f(x, y, z) = x^2 y + 3z$ とすると，

$$\nabla f = (2xy,\ x^2,\ 3)$$

となる.[1]

これを用いて，電位

$$V(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}$$

に対応する電場 $\boldsymbol{E}$ が

$$\boldsymbol{E}(x,y,z)=-\nabla V=\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{x}{r},\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{y}{r},\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{z}{r}\right)$$

であることを求めよ．ここで r は位置ベクトル $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ の大きさ

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

である.[2]

[1]偏微分とは,「その文字以外は定数だと思って微分する」という意味である．よって $\frac{\partial f}{\partial x}$ は，f を，x 以外の文字は定数だと見なして，x で微分すればよい．

[2]なお，この式は位置ベクトル $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 方向の単位ベクトル

$$\boldsymbol{e}_r=\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

を用いれば

$$\boldsymbol{E}(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$

と書くことができる．これは

大きさが$\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}$で，原点から放射状外向きのベクトル

であり，確かに原点に置かれた点電荷が作る電場になっていることがわかる．