第10章　慣性モーメントと剛体の運動

10.1　はじめに：

- 力のモーメントによって，角運動量が時間変化する → 回転の運動方程式 $\dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}$
- 質量のような，回転運動を「変化させにくくする」物理量 → 慣性モーメント
- 慣性モーメントが一定の場合，回転の運動方程式は $I\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = N$
- 変形しないと理想化された物体 = 剛体
- 円や球など，対称性の高い剛体は慣性モーメントを（コンピューターを使わずに）計算できる
- 剛体が運動すると回転も伴うことが多いので，並進運動の運動方程式 $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ と回転の運動方程式を組み合わせて解くことになる．

10.2　慣性モーメント

これまでは 1 つの質点が回転運動するケースを考えてきたが，現実には観覧車のゴンドラのようにいくつもの物体が一斉に回転することもあるし，ボールや筒のように質点というより大きさを持った物体が回転することもある．それらの回転運動は 1 体の回転運動を足し合わせたものになり，慣性モーメントという物理量が重要になる．

10.2.1　質点系の角運動量と慣性モーメント

ここでは観覧車のようにいくつかの質点が一斉に回転する場合を考える．図 10.1 のように，N 個の質点が回転軸に付けられて回転しているとしよう．観覧車のゴンドラならどれも同じ質量で，同じ回転半径になっているだろうが，ここではより一般的なケースとして質点の質量はそれぞれ $m_1, m_2, \cdots, m_N$ であり，質点と回転軸を結びつけている棒の長さは $r_1, r_2, \cdots, r_N$ とする．棒は軽くて伸び縮みしないとする．

さて，系の回転軸が z 軸であり，xy 平面の中で角速度 $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$ で回転しているとする．これ以降，角速度 ω は一定でなくてもよいものとしよう．これは議論に本質的ではないが，どうせなら非等速な円運動まで一般化しておきたいからである．

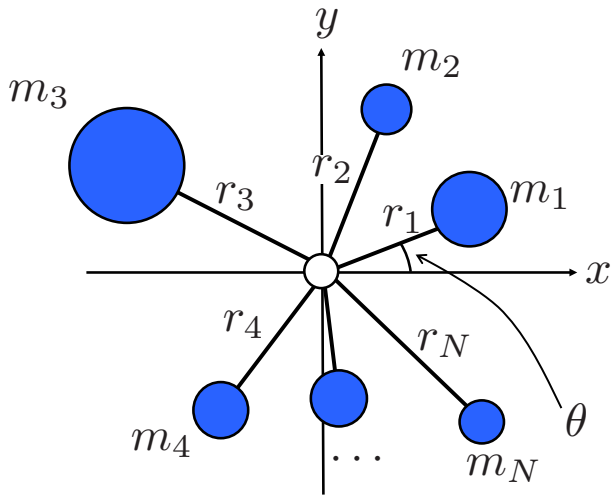

図 10.1: N 個の質点が異なる長さの棒で繋げられた系．同じ角速度 $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$ で回転する．

質点 1 が持つ角運動量は 1 つの質点の回転のときを参考にして

$$\boldsymbol{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 r_1^2 \omega \end{pmatrix} \tag{10.2.1}$$

となる．どの質点も同じ回転軸にくっついているので，角速度はどれも ω である．これより系全体の角運動量は，質点 1，2，$\cdots$，N の分を全部足して

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} &= \boldsymbol{L}_1 + \cdots + \boldsymbol{L}_2 + \cdots + \boldsymbol{L}_N & (10.2.2) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 r_1^2 \omega + m_2 r_2^2 \omega + \cdots + m_N r_N^2 \omega \end{pmatrix} & (10.2.3) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(\sum_{j=1}^N m_j r_j^2\right) \omega \end{pmatrix} & (10.2.4) \end{aligned}$$

となる．ここで

$$I = \sum_{j=1}^N m_j r_j^2 \tag{10.2.5}$$

と書くことにすると

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I\omega \end{pmatrix} \tag{10.2.6}$$

とすっきりまとめることができる．ここで導入した $I = \sum m_j r_j^2$ のことを**慣性モーメント** と呼ぶ．

回転の運動方程式へこの結果を代入すると

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ N \end{pmatrix} \tag{10.2.7}$$

がわかる．ここで，今考えているような回転に必要な力は xy 平面内で働く力であり，その力のモーメントは z 軸に平行となるはずなので $\boldsymbol{N}$ は z 成分のみ持つとした.[1] 式 (10.2.7) の z 成分のみ取り出すと

$$\frac{d(I\omega)}{dt} = N \tag{10.2.10}$$

を得るが，今のケースのように，慣性モーメント I が一定なら方程式 (10.2.10) で I を微分の外に出すことができて

$$I\frac{d\omega}{dt} = N \tag{10.2.11}$$

となる．これも回転の運動方程式の一つの表現である．これを変形すれば

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{N}{I} \tag{10.2.12}$$

となるが，これをニュートンの運動方程式を速度 v で書いたもの

$$m\frac{dv}{dt} = F \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \tag{10.2.13}$$

と比べると，そっくりな形であることがわかる．よって回転運動において質量 m と同じ働きをするのが慣性モーメント I であり，

慣性モーメントは，回転運動の変化させにくさを表す

といえる．慣性モーメントが大きい質点系があると，最初に止まっていたならなかなか回転させられないし，逆に最初から回転していたものはなかなか止められないことを表す．質量が大きいとなかなか動き出さなかったり，すでに動いているものを止めるのが大変であることに対応している．

10.2.2　慣性モーメントと角運動量保存則

式 (10.2.10) で力のモーメント N がゼロの時

$$\frac{d(I\omega)}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad I\omega = \text{一定} \tag{10.2.14}$$

を得る．これも角運動量保存則の表し方のひとつである．

[1] xy 平面内でのみ働く力および位置ベクトルは z 成分を持たないため

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10.2.8}$$

と書けるはずである．よって力のモーメントは

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xF_y - yF_x \end{pmatrix} \tag{10.2.9}$$

のように，z 成分しか持たない．前回の宿題にあった単振り子の場合の力のモーメントも同じようになっているので復習して欲しい．

この式を見ると，力のモーメントが働かないとき，慣性モーメントと角速度が反比例することがわかる．フィギュアスケートの選手がスピンをするとき，氷を蹴って回転し始めた後は足で氷を蹴っていないのに回転速度がどんどん速くなるのを見たことがある人もいるかもしれない．あれは角運動量保存則が成り立っていることからくる現象である．回転し始めるときには腕を広げて慣性モーメントを大きくし，その後で腕を体に引きつけて慣性モーメントを小さくすると，角速度が慣性モーメントに反比例して大きくなるのである．

10.2.3　回転の運動方程式の表し方

角速度は角度の時間変化である．一定の速度で回転する場合には，角度の変化を $\Delta\varphi$，変化に掛かった時間を Δt として

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \tag{10.2.15}$$

で計算できるが，一定の速度でない場合には微分を使って

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \tag{10.2.16}$$

で定義される．これを用いると回転の運動方程式は

$$I\frac{d\omega}{dt} = N \quad \Leftrightarrow \quad I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = N \tag{10.2.17}$$

とも書ける．ちょうどこれは

$$m\frac{dv}{dt} = F \quad \Leftrightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = F \tag{10.2.18}$$

と同じ関係である．さらに，角加速度

$$\alpha = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \tag{10.2.19}$$

という量を定義すれば

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F \quad \Leftrightarrow \quad ma = F \tag{10.2.20}$$

と同様に，回転についても

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = N \Leftrightarrow \quad I\alpha = N \tag{10.2.21}$$

と書くこともできる．ついでに言うと，オリジナルの形である

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N} \tag{10.2.22}$$

は，

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{10.2.23}$$

と同じ形をしている．表す物理量こそ違うが方程式の形が同じなので，これまでに学習した解法を活用することができる．

10.3　連続体の慣性モーメント

質点とちがい，大きさを持つ物体で変形がないと近似できるような「かたい物体」を剛体と呼ぶ．厳密な意味での剛体が現実に存在するわけではないが，剛体と近似して運動を計算できるものも山ほどある．

剛体ももとをただせば原子や分子のような質点の集合体であるが，私たちの手のひらを細胞の集合体ではなく，滑らかな皮膚と見ることができるのと同様に，剛体も滑らかな連続体が固まったもの見なして差し支えない.[2]特に円板や円柱，球や球殻といった，形がシンプルな連続体については，コンピューターで数値計算しなくても慣性モーメントを計算することが可能である．

捉え方	質点の集合体	連続体
構成要素の質量	各質点 m_i	微小部分 $dm = \rho(\boldsymbol{r})dV$
構成要素から回転軸までの距離	各質点からの距離 r_i	微小部分からの距離 $R(\boldsymbol{r})$
全質量	$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$	$M = \int_{\text{剛体}} dm = \int_{\text{剛体}} \rho(\boldsymbol{r})\ dV$
慣性モーメント	$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$	$I = \int_{\text{剛体全体}} dm\ R^2(\boldsymbol{r})$

注：ここで r_i は各質点と回転軸との距離であり，質点の位置ベクトルの大きさ $|\boldsymbol{r}_i|$ のことではないので気をつけること．

10.3.1　慣性モーメントについて成り立つ定理（詳細は省く．講義では扱わない）

(1) 平行軸の定理： $I = I_G + Mh^2 \geqq I_G$

ここで，I_G は重心周りの慣性モーメント，M は剛体の質量．h は重心から回転軸までの距離を表す（図 10.2）．この定理からは，重心周りの慣性モーメントが最も小さいことも言える．

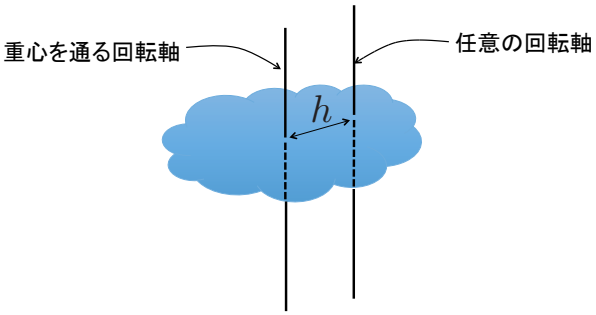

図 10.2: 任意の回転軸周りの慣性モーメントは，重心周りの慣性モーメントの値と，軸間の距離で計算することができる．

[2]もちろん剛体の素材の性質を調べたりするときにはそれを作っている原子や分子に注目しなければならない．物理とは「何を以て何を見るか」である．

(2) 薄板の直交軸の定理： $I_z = I_x + I_y$

ここで I_x, I_y, I_z は，xy 平面上に広がった薄い板の，x, y, z 軸周りの慣性モーメント（図 10.3）

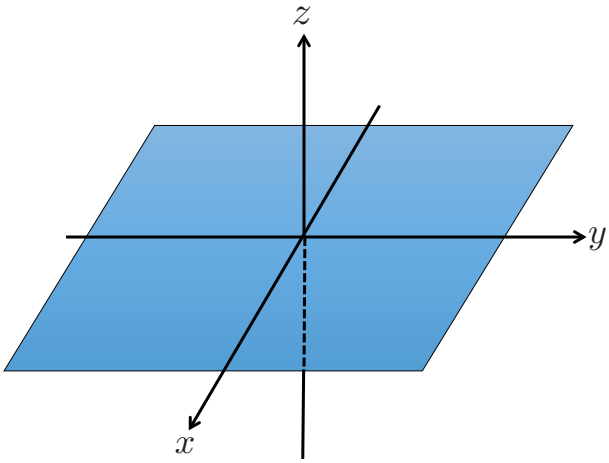

図 10.3: 薄板に関する慣性モーメント．x, y 軸周りの慣性モーメントを加えたものが z 軸周りの慣性モーメントに一致する．

10.3.2　いろいろな剛体の慣性モーメント（講義では結果のみ扱う．証明は次節以降）

以下のような形状の剛体については，慣性モーメントを簡単に求めることができる．どの剛体も内部の密度は均一で偏りなどはないものとする．

(1) 質量 M, 半径 a の十分薄い板の中心を通り板に垂直な軸周りの慣性モーメント：$I = \dfrac{1}{2}Ma^2$（図 10.4）

(2) 質量 M, 半径 a, 高さ h の円柱の中心を通り円柱に平行な軸周りの慣性モーメント：$I = \dfrac{1}{2}Ma^2$（図 10.4）

（つまり (1) と同じ値になる．理由を考えてみよ）．

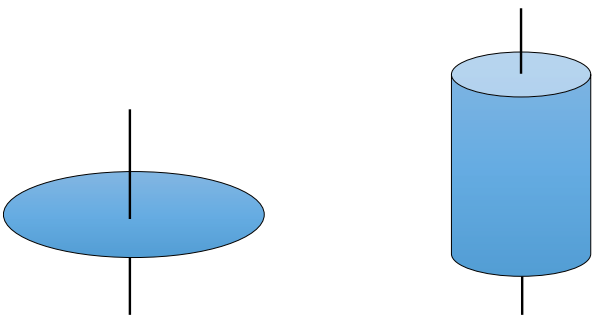

図 10.4: 円板と円柱．どちらも質量 M，半径 r．

(3) 質量 M, 半径 a の細い円輪の中心を通り円に垂直な軸周りの慣性モーメントおよび質量 M，半径 a の薄い円柱殻の中心を通り円柱に平行な軸周りの慣性モーメント：$I = Ma^2$

円輪の中心を通り，円の作る平面に沿う軸周りの慣性モーメントは (1) と同じ $I = \dfrac{1}{2}Ma^2$（図 10.5）

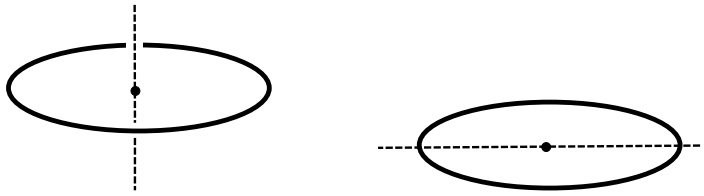

図 10.5: 円輪の中心を通り，円輪の作る平面に垂直な回転軸（左）および円輪の作る平面に沿う回転軸（右）．どちらも質量 M，半径 r.

(4) 質量 M, 半径 a の球の中心を通る軸周りの慣性モーメント：$I = \dfrac{2}{5}Ma^2$（図 10.6 左）

(5) 質量 M, 半径 a の薄い球殻（中がからっぽの球）の中心を通る軸周りの慣性モーメント：$I = \dfrac{2}{3}Ma^2$（図 10.6 右）

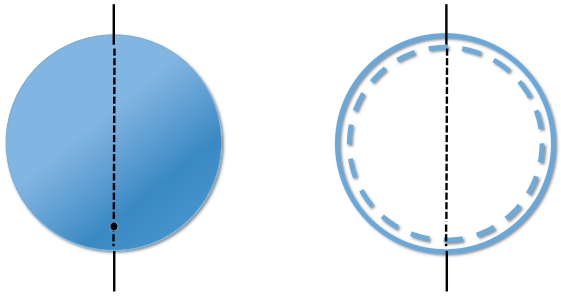

図 10.6: 球と球殻．どちらも質量 M，半径 r.

(6) 質量 M, 長さ $2a$ の細い棒の中点を通り棒に垂直な軸周りの慣性モーメント：$I = \dfrac{1}{3}Ma^2$（図 10.7）

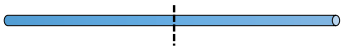

図 10.7: 長さ $2a$ の棒

(7) 質量 M, 辺の長さが AB= a, AD= b であるような薄い長方形 ABCD の板について，

a. 板の中心を通り長方形の辺 AB に平行な回転軸に関する慣性モーメント：$I = \dfrac{1}{12}Mb^2$（図 10.8 左）

b. 板の中心を通り，板に垂直な回転軸周りの慣性モーメント：$I = \dfrac{1}{12}M(a^2 + b^2)$（図 10.8 右）

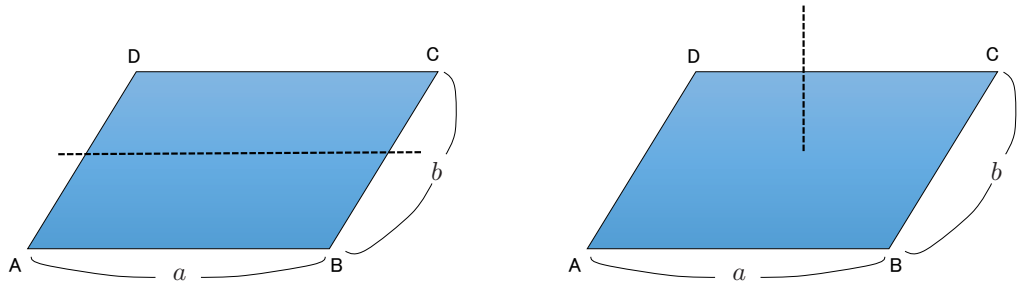

図 10.8: 長方形の慣性モーメント

10.3.3　斜面を転がる剛体の加速度

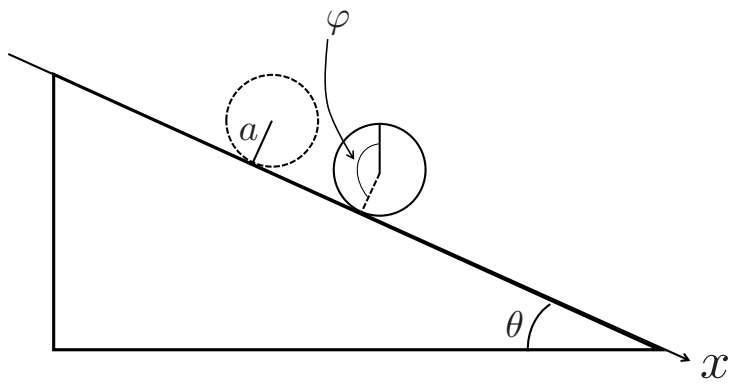

図 10.9: 斜面を転がる剛体

図 10.9 のように，角度 θ の斜面を質量 M, 半径 a の剛体が滑らずに（スリップせずに）転がり落ちるとする．ここで剛体としては，球・円柱・球殻・円柱殻の 4 つを考えており，それらの慣性モーメントをまとめて I としておく．重力加速度の大きさは g として，それらの加速度を計算してみる．

剛体の運動方程式を立てるために，まず剛体に働く力を考える．この場合，剛体に働く力は鉛直下向きの重力 Mg と，斜面下の垂直抗力 N，そして斜面からの静止摩擦力 F がある．ここで摩擦力は動摩擦力ではなく静止摩擦力であることに注意してほしい．剛体はスリップ，つまり空回りせずに回転しているので斜面とは「がっちり」かみ合いながら転がっているからである．

さて，垂直抗力と重力のうち斜面に垂直な成分が釣り合うから

$$N = Mg\cos\theta \tag{10.3.1}$$

が成り立つ．一方，剛体（の重心）の斜面方向の運動方程式は

$$M\ddot{x} = Mg\sin\theta - F \tag{10.3.2}$$

となる．もし静止摩擦力 F がない場合は，剛体は転がらずにスリップしながら滑り降りていくことになる．ここで x 軸は斜面に沿って下向きを正に取った．

この運動方程式以外に，剛体を回転させる原因である力のモーメントの大きさが Fa であること，およびそれを使うとこの剛体の回転の運動方程式が

$$I\ddot{\varphi} = Fa \tag{10.3.3}$$

も成り立つ．ここで φ は最初の状態から測った，剛体の回転を表す角度である．また，図より剛体が斜面に沿って進んだ距離 x と，剛体の回転角 φ の間には $x = a\varphi$ の関係があることもわかる．

こうして得られた斜面方向の運動方程式・回転の運動方程式および x と φ の関係式を使うと $\ddot{x}$ は g, M, θ, I を使って

$$\ddot{x} = \frac{M}{M + \frac{I}{a^2}} g \sin\theta \tag{10.3.4}$$

が導ける.（→宿題）この結果へ球・円柱・球殻・円柱殻の慣性モーメントの値を代入すればそれぞれの場合の加速度が求まる.[3] また，摩擦がない場合に傾き θ の斜面を滑る質点の加速度も求め，比較することも可能である．

10.4　参考：連続体の慣性モーメントの計算法（フローチャート）

慣性モーメントの計算を苦手とする人は多いが，そんなにたいしたことではない．ようは

<u>微小質量 dm とその微小質量から回転軸までの距離 $R(\boldsymbol{r})$</u>

を求め，上の表にある定義に従って積分するだけである． そこで実際に

1. 微小質量を求める
2. 回転軸までの距離を求める
3. 積分する

という 3 つのステップに分けて説明しよう．

[3]慣性モーメントの例にも書いたが，円柱と薄い円板とではどちらも慣性モーメントが $I = \frac{1}{2}Ma^2$ となる．なぜ同じなのか考えてみて欲しい．

ステップ１：微小質量を求める

基本中の基本から始めよう．中学校で教わったように

（質量）＝（密度）×（体積）

である．数式で書けば M を質量, ρ を密度，V を体積として

$$M = \rho \times V \tag{10.4.1}$$

である．ただし物体も場所によって濃かったり薄かったりするかもしれないから，一般的には密度は $\rho(\boldsymbol{r})$ としておくべきだろう．つまり位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ で指定される点 (x, y, z)（位置ベクトルの先が指しているところ）の密度が $\rho(\boldsymbol{r}) = \rho(x, y, z)$ ということである．

次に点 (x, y, z) の周辺にとても小さい領域を考えて，その体積を dV としよう．その領域が非常に小さいなら，その中で密度はほとんど変わらないはずだから，その領域の質量は「密度×体積」として差し支えないだろう．つまり

$$dm = \rho(\boldsymbol{r})\ dV \tag{10.4.2}$$

である．もし剛体の全質量 M を求めたければこの量を剛体全体にわたって足し上げる，つまり積分すればよく

$$M = \int_{\text{剛体全体}} dm = \int_{\text{剛体全体}} \rho(\boldsymbol{r})\ dV \tag{10.4.3}$$

とすればよい．ところでこの計算をするときは剛体の形状によって便利な座標を選び

- デカルト座標では $dV = dxdydz$
- 3 次元極座標では $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$
- 3 次元円柱座標では $dV = r dr d\theta dz$

のように異なる微小体積素を使うことになる.[4]

ここで注意しなければならないのは，剛体の形によって，違う密度を使っている可能性があることである．というのも，ここまでは「密度」として

$$\text{密度} = \text{単位体積あたりの質量} = \frac{\text{質量 } M}{\text{体積 } V} \tag{10.4.4}$$

で定義される**体積密度**を使ってきた.[5] しかし物体の形によっては「単位面積あたりの質量」や「単位長さあたりの質量」の方が重要なことも多い．例えば導線を考えてみて欲しい．導線を 2m 買うというのはわかるが，導線を 2m^3 買うというのはあまり聞いたことがない．もちろん導線の断面積がわかっていれば長さと掛けて体積は出せるが，何か面倒だ．こっちが売る側でそんなことを言ってくる客が来たら張り倒すか殴り倒すかしたくなる．どっちの方が効果的に倒せるかはともかく，導線のような細長い物体に関しては 1cm あたりどのくらいの重さなのかとか，1m あたりいくらなのかといった「単位長さあ

[4] なぜこうなるのか，これを求めるのに使うヤコビアンとは何なのかについては物理数学の「重積分」で紹介されると思う．
[5] 話を簡単にするために密度は一定としている．

たりの量」が重要なのだ．この「単位長さあたりの質量」のことを**線密度**という．一様な物体（どこでも均一で，ギュッと詰まっているところやスカスカのところがない物体）なら

$$\text{線密度 } \lambda = \text{単位長さあたりの質量} = \frac{\text{質量 } M}{\text{物体の長さ } L} \tag{10.4.5}$$

である．

逆に線密度 $\lambda(x)$ が与えられていて，そこから全質量を求めたければ微小質量を物体に沿って積分すればよい．この場合，位置 x における線密度を $\lambda(x)$ とするとそのごくごく付近では線密度は一定と見なせるだろうから，その付近（x から $x+dx$ の辺り）の微小な長さ dx の質量は

$$dm = \lambda(x)dx \tag{10.4.6}$$

となるはずである．ここで物体に沿って x 軸を張ってあるとした．あとはこれを

$$M = \int_0^L \lambda(x)dx \tag{10.4.7}$$

のように物体に沿って積分すれば全質量が求まる．ここで物体は $x=0$ から $x=L$ まで伸びているものとした．

平べったい板のような形をしたものも同様で，この場合は「単位面積あたりの量」が重要になる．$1\mathrm{m}^2$ あたり何 kg なのか，とかである．[6]「単位面積あたりの質量」は**面密度**といい，一様な物体なら

$$\text{面密度 } \sigma = \text{単位面積あたりの質量} = \frac{\text{質量 } M}{\text{物体の面積 } S} \tag{10.4.8}$$

で求めることができる．

逆に面密度 $\sigma(x,y)$ が与えられているなら，点 (x,y) における密度が $\sigma(x,y)$ ということだが，その点のごく近くに微小な領域を考え，その面積を dS とすればその微小部分の質量は

$$dm = \sigma dS \tag{10.4.9}$$

で求まる．これを物体全体にわたって積分すれば全質量が

$$M = \int_{\text{物体の面積}} \sigma dS \tag{10.4.10}$$

のように求まる．ここで dS は座標ごとに違っていて，

- デカルト座標では $dS = dxdy$
- 2 次元極座標では $dS = rdrd\theta$ (r：動径，θ：角度)

である．

[6]平べったいものと言えばヒラメの単位面積あたりの質量はどのくらいなのだろう．カレイと同じくらいだろうか．マンボウではどうだろう．どうでもいいが，マンボウを正面から見たいと思うのは俺だけではあるまい．

ステップ２：微小部分から固定軸までの距離を求める

実はこの部分が慣性モーメントの計算のキモかもしれない．見た目だけから言うと慣性モーメントの計算は重積分のところが一番難しく見えるが，あれは約束に従って計算するだけだからあまり頭を使う必要がないのだ．それに引き換え，このステップの計算は立体の適当な断面を考えなければならず，脳が汗をかくような気がする（例えば円柱の，中心を通らないような軸周りの慣性モーメントなど）．

残念ながらこの計算には一般論がないので，具体例を使うことにしよう．以下では考えている剛体中の任意の点を P としている．必ず自分で図を描きながら読んでみること．

例 1: 質量 M, 半径 a の十分薄い板の中心を通り板に垂直な固定軸

→ P の軸からの距離は r．よって $R = r$.

例 2: 質量 M, 半径 a, 高さ h の円柱の中心を通り円柱に平行な固定軸

→ P の軸からの距離は高さに関係なく r．よって $R = r$.

例 3: 質量 M, 半径 a の細い円輪の中心を通り円に垂直な固定軸

→ 円輪の半径は a で，P は当然輪の上．よって $R = a$

例 4: 質量 M, 半径 a の球の中心を通る固定軸

→ $\mathrm{P}(x, y, z)$ は極座標で $(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$ で表される． z 軸を回転軸とすると（球であれば x, y, z 軸のどれを回転軸にとっても結果が変わらないのは明らか），その距離は $R = r\sin\theta$.

例 5: 質量 M, 半径 a の薄い球殻（中がからっぽの球）の中心を通る固定軸

→ P は半径 a の球の表面上．よって前問を使って $R = a\sin\theta$.

例 6: 質量 M, 長さ $2a$ の細い棒の中点を通り棒に垂直な固定軸

→ 中点を原点として棒に沿って x 軸を張る．明らかに座標 x にある P と回転軸との距離は $R = |x|$.

ステップ３：積分する

このステップでは重積分をしなければならないことが多いのでビビってしまう人も多いだろう．しかし，実はこのステップが一番機械的なので楽なのである．積分という演算はそのくらい高度な道具だということだ．マスターしないなんて選択肢はあり得ない．ここではステップ 2 であげた例を実際計算してみよう．

例 1: 質量 M, 半径 a の十分薄い板の中心を通り板に垂直な軸周りの慣性モーメント

→ 面状の剛体なので面密度を考えると $\sigma = \dfrac{M}{\pi a^2}$.

微小質量はこの σ を使って $dm = \sigma dS = \sigma r dr d\theta$（円形なので 2 次元極座標を使った）．

P の軸からの距離は $R = r$ なので

$$\begin{aligned} I &= \int dmR^2 = \int \sigma r dr d\theta\ r^2 = \int \sigma r^3 dr d\theta \\ &= \sigma \int_0^a r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{M}{\pi a^2} \cdot \frac{1}{4} a^4 \cdot 2\pi = \frac{1}{2} M a^2 \end{aligned} \tag{10.4.11}$$

例 2: 質量 M, 半径 a, 高さ h の円柱の中心を通り円柱に平行な軸周りの慣性モーメント

→ 筒状の物体で中が詰まっているので体積密度を考えると $\rho = \dfrac{M}{\pi a^2 h}$.

微小質量はこの ρ を使って $dm = \rho dV = \rho r dr d\theta dz$ （筒状なので 3 次元円柱座標を使った）.

P の軸からの距離は高さに関係なく $R = r$ なので

$$\begin{aligned} I &= \int dmR^2 = \int \rho r dr d\theta dz\ r^2 = \int \rho r^3 dr d\theta dz \\ &= \rho \int_0^a r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \frac{M}{\pi a^2 h} \cdot \frac{1}{4} a^4 \cdot 2\pi \cdot h = \frac{1}{2} M a^2 \end{aligned} \tag{10.4.12}$$

例 3: 質量 M, 半径 a の細い円輪の中心を通り円に垂直な軸周りの慣性モーメント

→ 輪状の 1 次元物体なので線密度を考えると $\lambda = \dfrac{M}{2\pi a}$.

微小質量はこの λ を使って $dm = \lambda dx$ （輪に沿って x 軸を取った）.

P から軸までの距離は $R = a$ なので

$$I = \int dmR^2 = \int_0^{2\pi a} \lambda dx\ a^2 = \frac{M}{2\pi a} \cdot 2\pi a \cdot a^2 = M a^2 \tag{10.4.13}$$

例 4: 質量 M, 半径 a の球の中心を通る軸周りの慣性モーメント

→ 球状の物体で中が詰まっているので体積密度を考えると $\rho = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi a^3}$.

微小質量はこの ρ を使って $dm = \rho dV = \rho r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$ （球状なので 3 次元極座標を使った）.

P の軸からの距離は $R = r \sin\theta$ なので

$$\begin{aligned} I &= \int dmR^2 = \int \rho r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi (r\sin\theta)^2 = \int \rho r^4 \sin^3\theta dr d\theta d\varphi \\ &= \rho \int_0^a r^4 dr \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi a^3} \cdot \frac{1}{5} a^5 \cdot \frac{4}{3} \cdot 2\pi = \frac{2}{5} M a^2 \end{aligned} \tag{10.4.14}$$

ここで $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ より

$$\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \int_0^\pi \left(\frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta\right) d\theta = \left[-\frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{12}\cos 3\theta\right]_0^\pi = \cdots = \frac{4}{3} \tag{10.4.15}$$

を使った.

例 5: 質量 M, 半径 a の薄い球殻（中がからっぽの球）の中心を通る軸周りの慣性モーメント

解き方その 1

→ 球状だが薄い殻しかないので平べったい物体と同様に面密度を考えると $\sigma = \dfrac{M}{4\pi a^2}$.

微小質量はこの σ を使って $dm = \sigma dS = \sigma a^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ （球の表面を表す微小面積素を使った）.

P の軸からの距離は $R = a\sin\theta$ なので

$$\begin{aligned} I &= \int dmR^2 = \int \sigma a^2 \sin\theta d\theta d\varphi (a\sin\theta)^2 = \int \rho a^4 \sin^3\theta dr d\theta d\varphi \\ &= \rho a^4 dr \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{M}{4\pi a^2}\cdot a^4 \cdot \frac{4}{3}\cdot 2\pi = \frac{2}{3}Ma^2 \end{aligned} \tag{10.4.16}$$

解き方その２

例 4 の問題を応用し，外半径 a, 内半径 b の球を考える．つまり例 4 の球で，その中心から半径 b の球をくりぬいたものを考え，最後に $b \to a$ の極限を取る作戦である．この場合，密度が

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi(a^3 - b^3)} \tag{10.4.17}$$

となることと，r の積分範囲が 0 から a ではなく b から a までになることに気をつければよい．よってまず厚さ $a - b$ の厚みがある球殻の慣性モーメントは

$$\begin{aligned} I &= \int dmR^2 = \int \rho r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi (r\sin\theta)^2 = \int \rho r^4 \sin^3\theta dr d\theta d\varphi \\ &= \rho \int_b^a r^4 dr \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi(a^3-b^3)}\cdot\frac{1}{5}(a^5-b^5)\cdot\frac{4}{3}\cdot 2\pi \qquad (10.4.18) \\ &= \frac{2}{5}M\frac{a^5-b^5}{a^3-b^3} \qquad (10.4.19) \end{aligned}$$

と求まるので，厚みのない球殻の慣性モーメントは

$$\begin{aligned} \lim_{b\to a}\frac{2}{5}M\frac{a^5-b^5}{a^3-b^3} &= \lim_{b\to a}\frac{2}{5}M\frac{(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)} \qquad (10.4.20) \\ &= \frac{2}{5}M\frac{5a^4}{3a^2} = \frac{2}{3}Ma^2. \qquad (10.4.21) \end{aligned}$$

例 6: 質量 M, 長さ $2a$ の細い棒の中点を通り棒に垂直な軸周りの慣性モーメント

→ 棒状の 1 次元物体なので線密度を考えると $\lambda = \dfrac{M}{2a}$.

微小質量はこの λ を使って $dm = \lambda dx$ （棒に沿って x 軸を取った）.

棒の中点を x 軸の原点とすると P から軸までの距離は $R = |x|$ なので

$$I = \int dmR^2 = \int_{-a}^{a} \lambda dx\ |x|^2 = 2\lambda\int_0^a x^2 dx = 2\cdot\frac{M}{2a}\cdot\frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{3}Ma^2. \tag{10.4.22}$$

他にも平行軸の定理や薄板の直交軸の定理を使うと簡単に求められる慣性モーメントもある．どの力学の問題集にも載っているので，自分でいろいろ当たってみてほしい．ついでと言っては何だが，せっかくの機会なので数学の問題集にある重積分の問題にも当たってみるとよいと思う．