第 7 章　運動量・力積と運動量保存則

7.1　はじめに

- 運動量 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$，運動の「勢い」を表す
- 力積 $\Delta \boldsymbol{I} = \boldsymbol{F}\Delta t$ （1 次元なら成分で $\Delta I = F\Delta t$），瞬間的に物体に与えられた「衝撃」を表すのに使う
- 力積を与えると物体の運動量が変化する：$\Delta \boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}\Delta t$
- 内力と外力
  - 内力：考えている系に含まれる「登場人物」が互いに及ぼし合う力．必ず，作用に対して反作用に相当する力が存在する．
  - 外力：考えている系には含まれないものによる力．反作用は考えない．
- 運動量保存則：いくつかの物体が存在する系があり，それらの間に内力しか働かないとき，その系の運動量の合計は一定に保たれる．

7.2　運動量と力積

7.2.1　運動量の定義

物体の質量 m に物体の速度 $\boldsymbol{v}$ をかけた

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} \tag{7.2.1}$$

のことを**運動量**という．これは「運動の勢い」を表す量の一つと解釈できる．

例えば同じ速度で走ってきた車でも，軽自動車とダンプカーとでは衝突した際の衝撃は異なる．同じ速度ならダンプカーのような質量の大きい車の方が激しい衝突になるだろう．逆に，同じ質量の車なら速ければ速いほど，激しい衝突を引き起こすだろう．

ひと口に「衝撃」といっても何に注目するかによって測るべきものも変わるだろうが，今述べたように，速度が大きければ大きいほど，また質量が大きければ大きいほど「衝撃」が大きいのは間違いない．そこで質量 m と速度 $\boldsymbol{v}$ を掛け算した量である $m\boldsymbol{v}$ は，運動の勢いを表す目安の一つにはなるはずだ．このことは実験から確認され，ニュートンの運動の第 2 法則としてまとめられた．

7.2.2　運動方程式との関係

ニュートンの運動の 3 法則のうち，第 2 法則は「運動の法則」と呼ばれる．その中身を数式で表したのが運動方程式であり，これまで何度も出てきたように

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{7.2.2}$$

という数式で表される．ここで質量 m が定数なら数字の 1 や 2 と同じように微分の中と外を出し入れできるので

$$\frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{7.2.3}$$

となる．この $\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}$ が元々の運動の第 2 法則であり，ここからわかるようにその内容は

物体の運動量の時間変化は，物体に加えた力に比例する

である．質量 m が一定でないときは微分の外に出すことができないので運動量を使う元々の形で運動を解析する必要がある．

微分でなく，有限の微小な時間で表す方がわかりやすいかもしれないのでそちらでも説明しておくと，微小時間 Δt の間に物体の運動量が $\boldsymbol{p}$ から $\boldsymbol{p}'$ に変化したとすると，その単位時間当たりの変化は

$$\frac{\text{運動量の変化}}{\text{変化に掛かった時間}} = \frac{\Delta\boldsymbol{p}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}}{\Delta t} = \boldsymbol{F} \tag{7.2.4}$$

を満たすということになる．上の式で分母の Δt を払って変形した

$$\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}\Delta t \tag{7.2.5}$$

という式もよく使う．この右辺に出てきた $\boldsymbol{F}\Delta t$ は**力積** という．英語では impulse なので，その頭文字 I を使って

$$\Delta\boldsymbol{I} = \boldsymbol{F}\Delta t \tag{7.2.6}$$

と表すと，

$$\Delta\boldsymbol{p} = \Delta\boldsymbol{I} \tag{7.2.7}$$

と書ける．言葉では

物体の運動量の変化は，物体に加えられた力積に等しい

とまとめることができる．

7.2.3　運動量で見るか，運動エネルギーで見るか

第 5 回の講義で学んだ運動エネルギー $\dfrac{1}{2}mv^2$ も「運動の勢い」を表す度合いとして使えるのではないかと思った人はいないだろうか．実際この量も運動の勢いに関係しており，ニュートンと同時代のドイツ人科学者ライプニッツは「運動エネルギーの大小で運動の勢いを測るべきだ」と主張した．これに対

しニュートンは,「運動量の大小で運動の勢いを測るべきだ」と主張した.「運動の勢い」が何なのか定義されていない以上どちらが正しいとも判断できないが，どちらも関係していることは間違いない．実は，両者の違いは運動の勢いを「運動が持続する時間」で測るか,「運動が持続する距離」で測るかだけで，どちらもある意味正解である．

第 5 回で学習したように，運動エネルギーが変化するのは仕事をされたときである．つまり「力を加えながら動かす」ことが必要となる．第 5 回の宿題の最後で，摩擦力によって静止する物体の問題を扱ったが，そこで見たように物体が静止するまでに進む距離は物体の運動エネルギー変化に比例し，

$$\frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = Fs = -\mu mg \times s = (\text{摩擦力}) \times (\text{進んだ距離}) \tag{7.2.8}$$

となる．

同じ問題で，物体が止まるまでの時間に注目することもできる．加速度は $-\mu' g$ なので（第 5 回の宿題の解答を参照）等加速度運動の公式から，物体の速度について

$$v(t) = v_0 - \mu' gt \tag{7.2.9}$$

が成立する．物体が静止するまでに掛かった時間を Δt とすると

$$0 = v_0 - \mu' g\Delta t \tag{7.2.10}$$

となることがわかる．この式の v_0 を左辺に移項し，さらに両辺を m 倍すると

$$m \cdot 0 - mv_0 = -\mu' mg\Delta t \tag{7.2.11}$$

を得る．この式の左辺は運動量の変化である．右辺は，摩擦力 $-\mu' mg$ に止まるまでの時間 Δt が掛け算されている．物体に加えられた力にその力が加えられていた時間をかけたものが力積だから，この式は

$$\Delta p = m \cdot 0 - mv_0 = F\Delta t \quad = \quad -\mu' mg \times \Delta t \tag{7.2.12}$$

$$= \quad (\text{摩擦力}) \times (\text{止まるまでの時間}) = \text{力積} \tag{7.2.13}$$

となっている．これより，確かに運動量の変化は与えらえた力積に等しく，力 F が一定なら運動の継続時間 Δt は運動量変化に比例していることもわかる．

このように，物体の運動の勢いを「持続距離」を基準に議論するなら運動エネルギーを見ればいいし，「持続時間」を基準に議論するなら運動量を見ればよい．

7.3 運動量保存則

運動量保存則は，例えば衝突や爆発，分裂のような内力のみしか働かない系，または正味の外力が打ち消しあって消えている系で成立する．これを見るために，図 7.1 のような N 個の物体から成る系を考えよう．

今，N 個の物体のうちで j 番目のものに注目する．その物体には，1 番目，2 番目，$\cdots$，N 番目の物体がぶつかったり，互いに万有引力で引っ張ったりしながら力を及ぼす．それらの力をそれぞれ

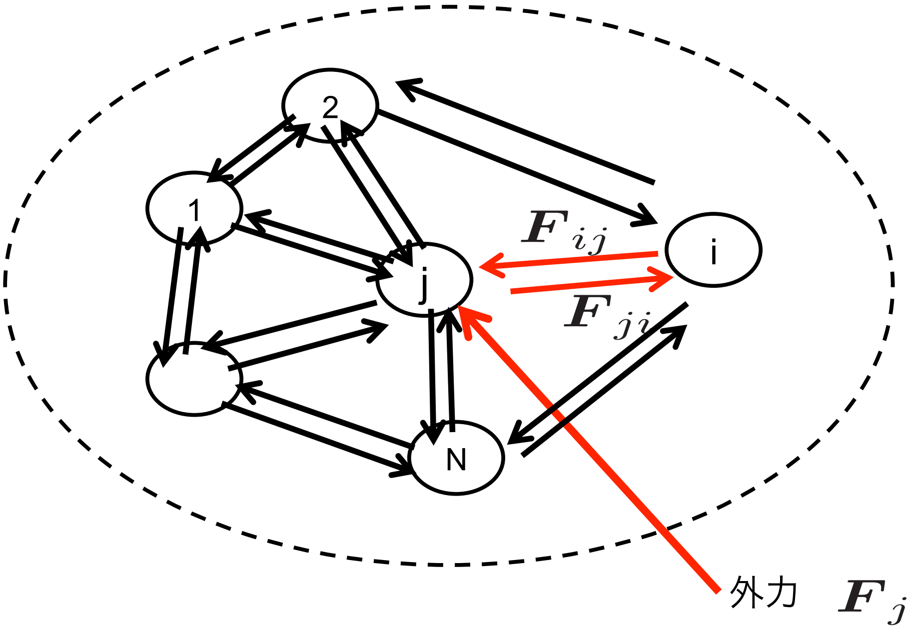

図 7.1: N 個の物体からなる系．j 番目の物体は残る $(N-1)$ 個の物体全てから内力を受けている．また，系の外から外力 $\boldsymbol{F}_j$ も受けている．

- 1 番目の物体が j 番目の物体に及ぼす力：$\boldsymbol{F}_{1j}$
- 2 番目の物体が j 番目の物体に及ぼす力：$\boldsymbol{F}_{2j}$

  $\cdots$

- N 番目の物体が j 番目の物体に及ぼす力：$\boldsymbol{F}_{Nj}$

と表す．一般に，

$$i \text{ 番目の物体が } j \text{ 番目の物体に及ぼす力 :} \boldsymbol{F}_{ij} \tag{7.3.1}$$

である．

$$j \text{ 番目の物体に働く外力 :} \boldsymbol{F}_{j} \tag{7.3.2}$$

としよう．

ここで，i 番目の物体が j 番目の物体に及ぼす力 $\boldsymbol{F}_{ij}$ は**内力である**ことに注目してほしい．例えばこれが万有引力だとすると，i 番目の物体が j 番目の物体をある力で引っ張っている時，j 番目の物体も i 番目の物体を同じ大きさで逆向きの万有引力で引っ張っている．接触して押すような力でも同様で，このような考えている系の構成メンバー間で働く力を内力と呼び

$$\boldsymbol{F}_{ji} = -\boldsymbol{F}_{ij} \tag{7.3.3}$$

が成立する．

一方，外力 $\boldsymbol{F}_j$ は系の構成メンバーが加えている力ではない．このように,「何が内力で，何が外力か」は「系の構成メンバーが誰なのか」を決めないと決まらない．例えば，地球から物体に働く重力を外力

とみなすか，内力とみなすかは,「地球まで系の構成メンバーとして考えなければいけないかどうか」で決まる．地上で小石が落ちるような場合，地球は全く動かないとして差し支えないだろうから，地球と小石を一つの系として考えるよりは，重力を地球から小石への外力として考えれば十分だろう（実際今までそうしてきた）．

対して，巨大な隕石の衝突のように，地球自体の動きも考えなければ運動を解析できないときもある．この場合は地球も系の構成メンバーとして捉え，地球の動きについても運動方程式を立てて，隕石の運動方程式と連立させる必要がある．このとき地球と隕石との間の万有引力は内力とみなす．このように,「この力はいつでも内力」とか「その力ならいつも外力」というわけではなく，状況に応じて内力とみなしたり，外力とみなしたりするということなので気をつけてほしい．

さて，考えている系の解析に戻ろう．当たり前だが，系の構成メンバー間で及ぼし合う内力 $\boldsymbol{F}_{ij}$ には，自分から自分への内力は存在しない．数式では

$$\boldsymbol{F}_{jj} = 0 \quad (\text{任意の } j \text{ について}) \tag{7.3.4}$$

である.[1] これで j 番目の物体の運動方程式を書くことができるようになった．実際に書いてみると

$$m_j \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{F}_{1j} + \boldsymbol{F}_{2j} + \cdots + \boldsymbol{F}_{Nj} + \boldsymbol{F}_j \tag{7.3.5}$$

となる．なお

$$m_j \quad : \quad j \text{ 番目の物体の質量} \tag{7.3.6}$$

$$\boldsymbol{a}_j \quad : \quad j \text{ 番目の物体の加速度} \tag{7.3.7}$$

である．

ここで天下り的だが，$1, 2, \cdots, N$ 番目の物体の運動方程式を並べて書いて，それらを一気に足してみよう．すると内力の性質 $\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji}$ および $\boldsymbol{F}_{jj} = 0$ から

$$\begin{array}{rcl}
m_1 \boldsymbol{a}_1 & = & \boldsymbol{F}_{11} + \boldsymbol{F}_{12} + \cdots + \boldsymbol{F}_{1N} + \boldsymbol{F}_1 \\
m_2 \boldsymbol{a}_2 & = & \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{22} + \cdots + \boldsymbol{F}_{2N} + \boldsymbol{F}_2 \\
 & \cdots & \\
+) \quad m_N \boldsymbol{a}_N & = & \boldsymbol{F}_{N1} + \boldsymbol{F}_{N2} + \cdots + \boldsymbol{F}_{NN} + \boldsymbol{F}_N \\
\hline
m_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + m_N \boldsymbol{a}_N & = & \boldsymbol{0} + \boldsymbol{F}_1 + \cdots + \boldsymbol{F}_N
\end{array}$$

となることがわかる．$\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji}$ によって，内力は全て打ち消されてしまうのである．残りは

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{a}_j = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j \tag{7.3.8}$$

となる．左辺はそれぞれの物体の質量と加速度とを掛けたものの和，右辺は外力の和である．

見やすくするために，系の全運動量の和を

$$\boldsymbol{P} = \sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{v}_j \tag{7.3.9}$$

[1] ミクロの世界では事情が変わってくる．例えば電荷が，自分で作り出した電場から影響を受けるということがある．

とし，系に加わる外力の和を

$$\boldsymbol{F}_T = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j \tag{7.3.10}$$

と書くことにすると，式 (7.3.8) は

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \boldsymbol{F}_T \tag{7.3.11}$$

と書き換えられる．

これより，

> **正味の外力がゼロ，つまり全ての外力が打ち消しあって $(\boldsymbol{F}_T = 0)$ なら，系の全運動量 $\boldsymbol{P}$ は一定に保たれる**

がわかる．数式で書けば，

$$\boldsymbol{F}_T = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{P} = \text{一定} \tag{7.3.12}$$

である．これを運動量保存則という.

7.4 重心の運動

7.4.1 重心の定義

運動量保存則は重心の運動と関係がある．今，N 個の物体からなる系を考え，位置ベクトルが $\boldsymbol{r}_j$ の場所に質量 m_j の物体があるとする．j は 1 から N を指す．このとき，重心の位置ベクトルは

$$\boldsymbol{r}_G = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + \cdots + m_N\boldsymbol{r}_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} = \frac{\sum m_j\boldsymbol{r}_j}{\sum m_j} = \frac{\sum m_j\boldsymbol{r}_j}{M}, \tag{7.4.1}$$

で定義される．ここで M は系に含まれる物体の質量の合計である．シグマはスペースの関係で明示していないが，1 から N まで和を取るものとする．

7.4.2 重心の動きと運動量保存則の関係

ここで $\boldsymbol{r}_G$ を時間 t で微分すると

$$\boldsymbol{v}_G = \frac{d\boldsymbol{r}_G}{dt} = \frac{\frac{d}{dt}\sum m_j\boldsymbol{r}_j}{M} = \frac{\boldsymbol{P}}{M}. \tag{7.4.2}$$

を得る．これより，もし $\boldsymbol{P}$ が一定なら，$\boldsymbol{v}_G$ もまた一定であることがわかる．つまり，

> **系の運動量の和が保存するとき，系の重心の速度は一定に保たれる**

ということである．系の重心が最初に止まっていたなら，運動量が保存される限り，重心はずっと静止し続けることもわかる．

7.4.3 跳ね返り係数

運動量保存を使って物体の衝突や追突を調べるとき，跳ね返り係数という物理量を使うことが多い．定義は以下の通りである．

1 次元の衝突において，物体 1 と 2 を考え，それぞれの速度を v_1，v_2 とする．先を走っていた物体 2 に後ろから物体 1 が追突して，速度がそれぞれ v_1'，v_2' 変化したとする．このとき，両者の相対速度の変化の比（にマイナスをつけたもの）を跳ね返り係数という．つまり

$$
\begin{aligned}
e &\equiv -\frac{\text{追突後の相対速度}}{\text{追突前の相対速度}} \qquad (7.4.3)\\
&= -\frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1} \qquad (7.4.4)
\end{aligned}
$$

である．

壁に衝突する場合，壁はずっと速度ゼロだから，上の式で $v_2 = 0$ として

$$
e = -\frac{v_1'}{v_1} \qquad (7.4.5)
$$

となる．

特に，

- $e = 1$ のとき：完全弾性衝突
- $e = 0$ のとき：完全非弾性衝突

という．完全弾性衝突とは，衝突の前後で相対速度が変わらないような衝突である．これは衝突の際にへこんだり，音を出したりすることによる運動エネルギーの減衰がないということなので，このときは運動量保存に加えて力学的エネルギー保存も成り立つ．$e = 1$ 以外の衝突では，運動量は保存するが，力学的エネルギーは保存しない．この意味で，運動量の方が「保存し易い」と言えるかもしれない．