第4章　2階線形微分方程式の解法

4.1　定数係数の2階線形常微分方程式

ばね定数 k のばねに質量 m のおもりを振動させると単振動するが，その運動方程式は

$$ma = -kx \tag{4.1.1}$$

という形をしている．ここに速度に比例する空気抵抗 $-\tilde{k}v$ までとりいれれば，運動方程式は

$$ma = -kx - \tilde{k}v \tag{4.1.2}$$

となるだろう．ここで $a = \dfrac{d^2x}{dt^2}, \quad v = \dfrac{dx}{dt}$ であることを思い出すと，この運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \tilde{k}\frac{dx}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\tilde{k}}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{4.1.3}$$

となる．このタイプの運動方程式は自然界の様々な場面で見られる重要なものであり，解き方もよく知られている．

4.1.1　微分方程式の形

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 3\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = 0 \tag{4.1.4}$$

のように，一般的に p, q を定数とし，

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + p\frac{dx(t)}{dt} + qx(t) = 0 \tag{4.1.5}$$

というタイプの微分方程式を**定数係数の2階線形斉次常微分方程式**という.「斉次」とは，微分方程式の右辺に t の関数 $F(t)$ がないことを指す．つまり非斉次なら

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + p\frac{dx(t)}{dt} + qx(t) = F(t) \tag{4.1.6}$$

となる．もちろん $F(t)$ が入ると解くのは面倒になったり，$F(t)$ の形によっては手では解けないこともあり得る．ちなみに例えば振り子に周期的な外力を加えて振幅を増幅させているときの eom は $F(t) = F_0 \sin\tilde{\omega}t$ としたものになり，これは解ける例として有名な「強制振動」と呼ばれる現象である．

式 4.1.5 の微分部分をまとめて

$$\mathcal{L}x(t) = \left(\frac{d^2}{dt^2} + p\frac{d}{dt} + q\right)x(t) = 0 \tag{4.1.7}$$

のように $\mathcal{L}$ という記号で表すことがある．この $\mathcal{L}$ のことは**微分演算子**という．

4.1.2　独立な解と線形結合

この微分方程式を解くと独立な解が 2 つ見つかるが，**それらを線形結合したものもまた，微分方程式の解になる**という特徴がある．実際，この方程式の独立な解 $x_1(t), x_2(t)$ が見つかったとすると，それらは上の微分方程式を満たすのだから当然

$$\mathcal{L}x_1(t) = 0 \quad \text{かつ} \quad \mathcal{L}x_2(t) = 0 \tag{4.1.8}$$

を満たす．これを使うと $x_1(t)$ と $x_2(t)$ の線形結合 $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ も

$$\mathcal{L}\left(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\right) = \alpha \mathcal{L}x_1(t) + \beta \mathcal{L}x_2(t) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 \tag{4.1.9}$$

のように，微分方程式 (4.1.7) を満たす．ここで，α, β は定数なので微分演算子 $\mathcal{L}$ の外に出せること，例えば

$$\frac{d}{dt}(\alpha x_1(t)) = \alpha \frac{dx_1(t)}{dt} \tag{4.1.10}$$

などのようにできることを使った．

4.2　復習：単振動タイプの微分方程式

第 4 回の宿題にあったように，単振動タイプの微分方程式の解は，より一般的には複素一般解と呼ばれるものになる．その求め方は定数係数の 2 階線形常微分方程式を解く方法と同じなので，宿題の解説を兼ねてここで例として上げる．以下では ω は実数であることを暗に仮定する．なお，微分方程式を解く上ではこの仮定は必要ないが，単振動に話を限る分には ω は実数しか現れない．

4.2.1　単振動タイプの微分方程式の複素一般解

まず単振動タイプの微分方程式

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0 \tag{4.2.1}$$

の解が，定数 λ を使って

$$x(t) = e^{\lambda t} \tag{4.2.2}$$

と書けるのではないかと**仮定する**（こういったうまい仮定の置き方には定石がないので，残念ながら覚えておくしかない）．この仮定した解が微分方程式 (4.2.1) を満たすなら，代入して等号が成り立つはずだから

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = \lambda^2 e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = (\lambda^2 + \omega^2)e^{\lambda t} = 0 \tag{4.2.3}$$

が任意の時刻 t で成立しなければならない．これより

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm i\omega \tag{4.2.4}$$

である．こうして

$$e^{i\omega t}, \quad e^{-i\omega t} \tag{4.2.5}$$

の二つが解になっていることがわかる．ここで λ の式 $\lambda^2+\omega^2=0$ を**特性方程式**という．

これら二つの解がわかると，実はこれらの**線形結合（一次結合）**も解になっていることがわかる．

実際，α, β を任意の複素数として

$$x(t)=\alpha e^{i\omega t}+\beta e^{-i\omega t} \tag{4.2.6}$$

を 2 回微分してみると

$$\begin{aligned} \frac{d^2x(t)}{dt^2} &= \frac{d^2}{dt^2}\left(\alpha e^{i\omega t}+\beta e^{-i\omega t}\right) && (4.2.7)\\ &= \alpha\frac{d^2}{dt^2}\left(e^{i\omega t}\right)+\beta\frac{d^2}{dt^2}\left(e^{-i\omega t}\right) && (4.2.8)\\ &= \alpha(-\omega^2 e^{i\omega t})+\beta(-\omega^2 e^{-i\omega t})=-\omega^2\left(\alpha e^{i\omega t}+\beta e^{-i\omega t}\right) && (4.2.9)\end{aligned}$$

となり，単振動タイプの微分方程式を満たしていることはすぐに確かめられる．

この解は α,β が複素数なので**複素一般解**というが，先にやった実一般解は，複素一般解に含まれている．なぜならオイラーの式

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \tag{4.2.10}$$

を使えば

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha e^{i\omega t}+\beta e^{-i\omega t} && (4.2.11)\\ &= \alpha(\cos\omega t+i\sin\omega t)+\beta(\cos\omega t-i\sin\omega t) && (4.2.12)\\ &= i(\alpha-\beta)\sin\omega t+(\alpha+\beta)\cos\omega t && (4.2.13)\end{aligned}$$

となるから,[1]

$$i(\alpha-\beta), \quad \alpha+\beta \tag{4.2.14}$$

の二つが実数なら，これは実一般解そのものである．

なお，これらが実数であるためには α と β が互いに複素共役であればよい．つまり a,b を実数として

$$\alpha=a+bi,\ \beta=a-bi \quad \Rightarrow \quad i(\alpha-\beta)=-2b,\ \alpha+\beta=2a \tag{4.2.15}$$

となるからである．実一般解ではこの a,b を $C=-2b,\ D=2a$ を満たす C,D で表していたわけである．

単振動のような，現実に起こる現象の場合は位置や速度といった物理量はもちろん実数になる．そのため最終的には実数解のみが残るが，複素数に拡張することで指数関数を活用することができ，問題が解き易くなることがよくある．特に電磁気学などではそうした計算方法を用いる．また，ミクロの世界を扱うための理論である量子力学では，観測量は実数だが，それを計算するために必要となる波動関数という量は複素数の範囲で考える必要がある．こういった理由から，複素数で計算することにも慣れておいた方がよい．

[1] $e^{-i\omega t}=\cos(-\omega t)+i\sin(-\omega t)=\cos\omega t-i\sin\omega t \quad (\because \sin(-\theta)=-\sin\theta,\ \cos(-\theta)=\cos\theta)$

例題 2.1.1：単振動タイプの微分方程式の複素一般解

以下の微分方程式の複素一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -16x$
（略解：$x(t) = \alpha e^{4it} + \beta e^{-4it}$　(α, βは任意の複素数)）

(2) $\dfrac{dp}{dt} = -kx, \quad \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{p}{m}$　($x(t)$ の複素一般解を求めよ．k, m は実数の定数である．)
（略解：$x(t) = \alpha e^{i\sqrt{k/m}\ t} + \beta e^{-i\sqrt{k/m}\ t}$　(α, βは任意の複素数)）

4.3　応用：減衰振動

ここまでの単振動の問題では摩擦を無視しているので，あまり現実ではない．摩擦にもいろんな種類があるが，ここでは一番扱い易い空気抵抗からくる摩擦が入った場合の単振動について考える．落体の問題でやったように，その場合は摩擦力が速度に比例する．よって運動方程式は

$$ma = -kx - \tilde{k}v \quad (\tilde{k}\text{は正の定数}) \tag{4.3.1}$$

となる．左辺へ全て移項して書き直すとこの式は

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = 0 \quad \left(\frac{\tilde{k}}{m} = 2\gamma,\ \frac{k}{m} = \omega^2\text{とおいた}\right) \tag{4.3.2}$$

となる．これは前節の最後に紹介した

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + p\frac{dx(t)}{dt} + qx(t) = 0 \tag{4.3.3}$$

というタイプなので**定数係数の斉次 2 階線形常微分方程式**である．以下では $2\gamma\dfrac{dx(t)}{dt}$ の項を摩擦項と呼ぶことにする．場合分けをしながら一般的な解について説明するが，全ての場合について理解する必要はない．全員に必ずマスターして欲しいのは，

- $\underline{\gamma = 0\text{ で，摩擦のない単振動に帰着する場合（すでに学習済み）}}$
- $\underline{\gamma > 0\text{ かつ }\gamma^2 - \omega^2 < 0\text{ で，減衰しながら振動する場合}}$

の 2 つである．

4.3.1　摩擦項入りの単振動タイプの微分方程式の解き方

(4.3.2) を解くときも，解を $e^{\lambda t}$ と仮定すればよい．これを代入してみると

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}) = \lambda e^{\lambda t}, \quad \frac{d^2}{dt^2}(e^{\lambda t}) = \lambda^2 e^{\lambda t} \tag{4.3.4}$$

なので

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = \left(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2\right) e^{\lambda t} = 0 \tag{4.3.5}$$

から特性方程式

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0 \tag{4.3.6}$$

を得る．2 次方程式の解の公式を使えばこの λ は

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \tag{4.3.7}$$

のように求まる．よって独立な解として

$$e^{(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2})t}, \quad e^{(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2})t}, \tag{4.3.8}$$

を得るが，この解の振舞いは γ の正負と，$\gamma^2 - \omega^2$ の値によって全く異なるので以下で場合分けして考える．

γ の物理的役割

まず γ について場合分けして考えよう．

(1) γ が正のとき

今考えているのは単振動に摩擦が入った場合なので $\gamma = \dfrac{\tilde{k}}{2m} > 0$ であり，このケースに当たる．このとき解にある $e^{-\gamma t}$ という部分は

$$e^{-\gamma t} \to 0 \quad (t \to \infty \text{ のとき}) \tag{4.3.9}$$

なので，時間がたつにつれて解の値を指数関数的に小さくする効果を担っている．これは摩擦力によって振動が減衰し，やがて止まってしまう状況を表している．

(2) γ が負のとき

今考えているケースでは $\gamma < 0$ ということはないが，数学的にはあり得るので，このケースも考えてみると

$$-\gamma = -\frac{\tilde{k}}{2m} > 0 \tag{4.3.10}$$

だから

$$e^{-\gamma t} \to \infty \quad (t \to \infty \text{ のとき}) \tag{4.3.11}$$

となって，時間とともに解が発散してしまうことがわかる．上で述べたように摩擦力が働くときは $\gamma > 0$ なので，このケースになるようなことは考えなくてよい.[2]

(3) $\gamma = 0$ のとき

このとき，最初の (4.3.2) に戻ると

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0 \tag{4.3.12}$$

となって，これは単振動タイプの微分方程式になる．よって解き方は複素一般解の求め方でで説明した通りである.[3]

$\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$ の物理的役割

先に述べたように，物理的には $\gamma > 0$ のケースが摩擦力の働く場合に対応するので，**以降はずっと $\gamma > 0$ だとする**．その上で $\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$ について考えよう．ルートの中身が正，負，ゼロのどれを取るかで実数，純虚数，ゼロの 3 通りを取りうるので，解の振舞いが変わってくる．

(1) $\gamma^2 - \omega^2$ が負のとき

これは $\gamma < \omega$ というときに起こるので，**抵抗力が弱い**場合に当たる．このとき

$$\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} = \sqrt{-(\omega^2 - \gamma^2)} = i\Omega \quad (\Omega = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2},\ \Omega\text{は実数}) \tag{4.3.14}$$

という実数 Ω を導入すると，特性方程式を解いて得られていた解は

$$e^{(-\gamma + i\Omega)t}, \quad e^{(-\gamma - i\Omega)t}, \tag{4.3.15}$$

の二つということになるので，これらを線形結合して（複素）一般解は

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha e^{(-\gamma + i\Omega)t} + \beta e^{(-\gamma - i\Omega)t} \quad (\alpha, \beta\text{は任意の複素数}) & (4.3.16) \\ &= e^{-\gamma t}\left(\alpha e^{i\Omega t} + \beta e^{-i\Omega t}\right) & (4.3.17) \end{aligned}$$

となる．実一般解なら

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t}\left(C \sin \Omega t + D \cos \Omega t\right) & (4.3.18) \\ &= A e^{-\gamma t} \sin(\Omega t + \delta) & (4.3.19) \end{aligned}$$

---

[2] もし例を思い付いた人がいたら教えて欲しい．

[3] ただし ω^2 が負になるケース，つまり ω が純虚数になるケースはまだ扱っていない．このときは κ を実数として $\omega^2 = -\kappa^2$ とおくと

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + qx(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} - \kappa^2 x(t) = 0 \tag{4.3.13}$$

なので二つの独立な解 $e^{\kappa t}$, $e^{-\kappa t}$ がすぐ見つかる．実一般解は $x(t) = Ce^{\kappa t} + De^{-\kappa t}$ のように指数関数の線形結合となる．これは量子力学ではよく現れる解なので（例えばトンネル効果），特に物理科の学生なら知っておいて損はない．

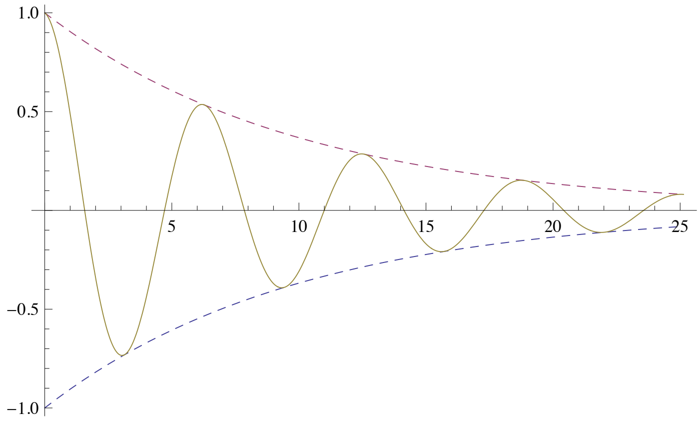

図 4.1: 減衰振動．例として $e^{-t/10}\cos t$ を $t=0$ から $t=8\pi$ までプロットした．

となる．(4.3.19) を見るとわかりやすいが，これは sin 関数の振幅部分に $e^{-\gamma t}$ がついた解である．この項の効果によって振幅が時間とともに小さくなっていく．つまり図 1 のように**単振動的に周期運動をしながら，だんだんその振幅が小さくなって，やがて止まってしまうことを表す**．もちろんこれは摩擦の効果である．このタイプの振動を**減衰振動**という．

例題 3.1.1：減衰振動になるタイプの微分方程式定数係数の 2 階常微分方程式

$$\ddot{x}(t)+2\dot{x}(t)+10x(t)=0$$

を解いて実一般解を求めよ．また初期条件 $x(0)=0,\ \dot{x}(0)=6$ に合う解を求め，$x-t$ グラフの概形を書け．

（略解：実一般解は $x(t)=e^{-t}(C\cos 3t+D\sin 3t)$，または $x(t)=Ae^{-t}\sin(3t+\alpha)$．初期条件に合う解は $x(t)=2e^{-t}\sin 3t$．グラフは省略する）

---

(2) $\underline{\gamma^2-\omega^2\text{ が正のとき}}$

これは $\gamma>\omega$ を意味するので，**抵抗力が強い**場合に当たる．このとき特性方程式の解について

$$\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-\omega^2}=\gamma_\pm(>0) \tag{4.3.20}$$

という正の数 $\gamma_\pm$ を定義すると複素一般解は α,β を任意の複素数として

$$x(t)=\alpha e^{-\gamma_+ t}+\beta e^{-\gamma_- t} \tag{4.3.21}$$

と書ける．実一般解は C,D を任意の実数として

$$x(t)=Ce^{-\gamma_+ t}+De^{-\gamma_- t} \tag{4.3.22}$$

$\gamma_{\pm}$ はどちらも正なので，解は必ず時間とともにゼロに収束していく．これは**摩擦力が強すぎて振動せずに止まってしまう**状態になっていると考えられる．この状態のことを**過減衰**という．

(3) $\gamma^2 - \omega^2$ がゼロのとき

これは特性方程式が重解 $e^{-\gamma t}$ しか持たないことを意味する．よって独立な解が1つしかないことになるが，今考えている方程式 (4.3.2) が2階の微分方程式であることと矛盾する．なぜなら，2階の微分方程式は積分定数を必ず2つ持つはずだから，それに対応して独立な解も2つあるはずだからである．そこでこの場合は独立な解を別の方法で探さなければならない．

具体的には，またも仮定として解を

$$x(t) = u(t)e^{-\gamma t} \tag{4.3.23}$$

と置いてみて方程式 (4.3.2) に試しに代入してみる．すると $\dfrac{du}{dt} = u'(t)$ として

$$\frac{d}{dt}\left(u(t)e^{-\gamma t}\right) = \left(u'(t) - \gamma u(t)\right)e^{-\gamma t}, \tag{4.3.24}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(u(t)e^{-\gamma t}\right) = \left(u''(t) - 2\gamma u'(t) + \gamma^2 u(t)\right)e^{-\gamma t} \tag{4.3.25}$$

より

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) &= \left\{u''(t) - 2\gamma u'(t) + \gamma^2 u(t) + 2\gamma\left(u'(t) - \gamma u(t)\right) + \omega^2 u(t)\right\}e^{-\gamma t} \\
&= \left\{u''(t) + (-\gamma^2 + \omega^2)u(t)\right\}e^{-\gamma t} \\
&= u''(t)e^{-\gamma t} = 0
\end{aligned} \tag{4.3.26}$$

を得る（なぜなら今は $\gamma^2 = \omega^2$ という場合を考えている）．よって

$$u''(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad u(t) = \alpha t + \beta \ (\alpha, \beta\text{は任意の複素数}) \tag{4.3.27}$$

のように $u(t)$ が決まることがわかるから，複素一般解は

$$x(t) = (\alpha t + \beta)e^{-\gamma t}, \tag{4.3.28}$$

実一般解は

$$x(t) = (at + b)e^{-\gamma t} \quad (a, b\ \text{は任意の実数}) \tag{4.3.29}$$

となる．

この場合も明らかに $t \to \infty$ の極限で振動がゼロに近づく．減衰振動と過減衰のちょうど境目の状態であることから，この状態は**臨界減衰**または**臨界制動**という．減衰振動および過減衰と比べてこの臨界減衰が一番早く減衰するので，車のサスペンションや顕微鏡の除振台のような，振動を取り除くための装置に応用されている．つまり，摩擦力に関連する係数 γ をうまく調整して，装置に掛かる振動の角振動数 ω に等しくなるようにするのである．