第1章　力学の目標と運動の表し方

1.1　はじめに

- 力学とは？

  → 平たく言えば，力に応じて物体がどう運動するかを（時間の関数として）記述する理論.

- 運動の様子は位置 $x(t)$・速度 $v(t)$ で記述できる.

- 物体の位置 $x(t)$・速度 $v(t)$・加速度 $a(t)$ は相互に微分積分で結ばれている．加速度を求め，積分すれば物体の運動が求まる（原理的には）．運動方程式 $a = \dfrac{F}{m}$ はそのために加速度を出す式.

1.2　位置・速度・加速度の関係

1.2.1　1 次元の運動

位置を時間で微分したものが速度．速度を時間で微分したものが加速度.

$$\text{位置} : x(t), \quad \text{速度} : v(t) = \frac{dx}{dt}, \quad \text{加速度} : a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\text{加速度 } a(t), \quad \text{速度 } v(t) = \int^t a(t')dt', \quad \text{位置 } x(t) = \int^t v(t')dt' = \int^t \left(\int^{t'} a(t'')dt'' \right) dt'$$

例題 2.1.1：微分で速度を求める

時刻 t における位置が $x(t) = t^2$ で表される運動をしている物体がある．この物体の速度と加速度を求めよ.

解

時刻 t に $0, 1, 2, \cdots$ などを代入していくと，この物体は時刻 $t = 0, 1, 2, 3, \cdots$ において $x = 0, 1, 4, 9, \cdots$ のように位置が変化していくことがわかる．だんだん移動距離が伸びていることから，この動きは等速直線運動ではない．このため，物体の速度を求めるには微分するしかない．よって

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2) = 2t$$

より，時刻 t での物体の速度は $\underline{v(t) = 2t}$ である.

同様に，加速度は速度の変化からわかる．微分して

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(2t) = 2$$

と求めてもよいが，$v(t) = 2t$ という結果から，時刻が $t = 0, 1, 2, 3, \cdots$ と進むにつれて，$v = 0, 2, 4, 6, \cdots$ と 2 ずつ，一定のペースで増えていくことがわかる．つまりこの運動は等加速度運動である．このことから $a = 2$ と求めてもよい．

1.2.2　2 次元以上の運動とベクトル

- 速度や位置は大きさと方向を持つので，ベクトルで表すと都合がよい．ベクトルで表される関数を**ベクトル値関数**という．
- ベクトル量は，$\vec{A}$ のような矢印以外に，$\boldsymbol{A}$ のように太字でも表す．印刷物では太字だが，手書きの時は $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \cdots$ のように二重線で表す．
- 3 次元空間なら，ベクトル値関数は成分を 3 つ持つ．通常は x, y, z 方向の 3 つの成分を考える．

  例：位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$，電場ベクトル $\boldsymbol{E}(t) = (E_x(t), E_y(t), E_z(t))$

  縦ベクトルとして書くことも多い．
- 温度・質量・密度のように，大きさのみで方向を持たない量はスカラーという．[1]
- 2 次元以上だとベクトルを使う，というわけではない．1 次元でも速度や力のようなベクトル量は存在する．しかし，1 次元だとベクトルで書いても成分が一つしかないので，通常は成分を書いてそれをベクトルと呼んでいるだけ．

  例：1 次元の速度ベクトル：$\boldsymbol{v} = (v)$ （成分が 1 つしかないので v のことを「速度」と呼んでいるが，正確には速度の x 成分である．これを整理しておくと，運動量を使った 1 次元の衝突問題で間違えなくなる．）

1.3　ベクトル値関数の微分

ベクトル値関数の微分は成分ごとに行えばよい（ただしデカルト座標のときのみ．極座標など，異なる座標系を使う時は注意）．3 次元空間なら x, y, z 方向の 3 つの成分があるので，普通の微分を 3 回行うことになる．

- 位置ベクトル：$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

  $$\Rightarrow \text{速度ベクトル：}\boldsymbol{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t)) = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}\right)$$
- 速度ベクトル：$\boldsymbol{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$

  $$\Rightarrow \text{加速度ベクトル：}\boldsymbol{a}(t) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t)) = \frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} = \left(\frac{dv_x(t)}{dt}, \frac{dv_y(t)}{dt}, \frac{dv_z(t)}{dt}\right)$$

[1] さらに上位の概念としてテンソルというものもある．

- 加速度ベクトルは位置ベクトルを時間で 2 回微分したもの：
$\boldsymbol{a}(t)=\dfrac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt}=\dfrac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2}=\left(\dfrac{d^2x(t)}{dt^2},\dfrac{d^2y(t)}{dt^2},\dfrac{d^2z(t)}{dt^2}\right)$

例題 3.1 ある物体の時刻 t における位置ベクトルが

$$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))=\left(t^2,a\sin t,e^{-2bt}\right)\ \ (a,b\text{ は定数})$$

であるとき，時刻 t でのその物体の速度，加速度を求めよ．

解: 速度，加速度をそれぞれ $\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{a}(t)$ とすると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}(t)&=\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}=\left(\frac{d}{dt}\left(t^2\right),\frac{d}{dt}\left(a\sin t\right),\frac{d}{dt}\left(e^{-2bt}\right),\right)=\left(2t,a\cos t,-2be^{-2bt}\right)\\ \boldsymbol{a}(t)&=\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt}=\frac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2}=\left(\frac{d}{dt}\left(2t\right),\frac{d}{dt}\left(a\cos t\right),\frac{d}{dt}\left(-2be^{-2bt}\right),\right)=\left(2,-a\sin t,4b^2e^{-2bt}\right)\end{aligned}$$

1.4 積分

積分も微分同様，成分ごとに積分する（ただしこれも，デカルト座標のときだけ）．加速度を積分すると速度，速度を積分すると位置が得られる．

1.4.1 1 次元のとき

加速度 a を積分したものが速度 v，速度 v を積分したものが位置 x：

$$v(t)=\int a(t')dt',\quad x(t)=\int v(t')dt'$$

となる．不定積分を実行すると積分定数が出るが，それらは初速度 v_0 と初期位置 x_0 から決まる．

例題 4.1.1：等加速度運動の公式

一定の加速度 a で 1 次元運動している物体がある．物体の速度 $v(t)$ と位置 $x(t)$ を求め，これまでに習った等加速度運動の公式と一致することを確認せよ．また，積分する際に現れる積分定数の物理的な意味を考えよ．

解

位置を微分すれば速度，速度を微分すれば加速度なので，その逆として

加速度を積分すれば速度，速度を積分すれば位置

が求まる．加速度が複雑な関数であれば積分するのは難しいが，等加速度運動やいくつかの運動については簡単に積分できる．

今，一定値 a の加速度で運動しているから，

$$v(t)=\int a dt=at+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

である．ここで積分定数 C は，$v(t) = at + C$ の式に $t = 0$ を代入すると $v(0) = C$ となることから，$\underline{C \text{ は } t = 0 \text{ における速度}}$，すなわち**初速度** に対応することがわかる．そこで物理では C のことを v_0 と書き，

$$\underline{v(t) = at + v_0}$$

と表す．

位置はこの速度をさらに積分して

$$x(t) = \int v dt = \int (at + v_0) dt = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + C' \quad (C'\text{は積分定数})$$

となる．C' は C と同様に考えると**初期位置**（$t = 0$ での位置）であることがわかる．物理ではこれを x_0 と書く．よって

$$\underline{x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0}$$

と表される．これら $v(t), x(t)$ の式は高校物理で学ぶ等加速度運動の公式に一致している（各自教科書を確認して下さい）．

1.4.2　３次元のとき

加速度が $\boldsymbol{a}(t) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t))$ であるとき，

$$\boldsymbol{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t)) = \left(\int a_x(t')dt', \int a_y(t')dt', \int a_z(t')dt' \right)$$
$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = \left(\int v_x(t')dt', \int v_y(t')dt', \int v_z(t')dt' \right)$$

この場合も不定積分から積分定数が出るので，初速度 $\boldsymbol{v}_0$ と初期位置 $\boldsymbol{r}_0$ を与えて値を決める．

例題 4.2.1 ある物体が加速度が

$$\boldsymbol{a}(t) = \left(18t, -\omega^2 A \sin \omega t, 4e^{-2t}\right) \quad (\omega, A \text{ は定数})$$

で与えられるような運動をしているとき，物体の速度 $\boldsymbol{v}(t)$ と位置 $\boldsymbol{r}(t)$ を求めよ．ただし初速度 $\boldsymbol{v}_0$ と初期位置 $\boldsymbol{r}_0$ はそれぞれ

$$\boldsymbol{v}_0 = (4, \omega A, -2), \quad \boldsymbol{r}_0 = (2, 1, -1)$$

であるとする．

<u>解</u>

まず速度から求める．速度の x 成分は

$$v_x(t) = \int a_x(t')dt' = \int 18t'dt' = 9t^2 + C_1 \quad (C_1\text{は積分定数})$$

であり，初速度の x 成分は 4 なのでそれに合うようにするためには

$$v_x(t = 0) = 9 \cdot 0^2 + C_1 = 4 \quad \therefore C_1 = 4$$

こうして

$$v_x(t) = 9t^2 + 4$$

を得る．y, z 成分も同様にして加速度の y, z 成分である a_y, a_z を積分し，初速度の y, z 成分がそれぞれ ωA と -2 であることを使うと，

$$v_y(t) = \omega A \cos\omega t, \quad v_z(t) = -2e^{-2t}$$

を得る．まとめてベクトルの形に書くと

$$\boldsymbol{v}(t) = \left(9t^2 + 4, \omega A \cos\omega t, -2e^{-2t}\right)$$

となる．

位置を求めるには今求めた v_x, v_y, v_z を積分して，初期位置の情報を使って積分定数を決めればよい．x 成分だけやってみると

$$x(t) = \int v_x(t')dt' = \int (9t'^2 + 4)dt' = 3t^3 + 4t + C_2 \quad (C_2\text{は積分定数})$$

であり，$\boldsymbol{r}_0 = (2, 1, -1)$ から初期位置の x 座標は 2 なので

$$x(t=0) = 3 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0 + C_2 = 2, \quad \therefore C_2 = 2$$

のように積分定数の値が決まる．y, z についても同様にして，

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(3t^3 + 4t + 2, A\sin\omega t + 1, e^{-2t} - 2\right)$$

のように求まる．

1.5　落体の運動（1 次元）

等加速度運動の例として，落体の運動について考える．空気抵抗は無視する．重力加速度の大きさは g とする．

1.5.1　自由落下

鉛直下向きに x 軸を取り，物体をそれに沿って自由落下させる．物体の初期位置を $x = 0$ とすると，時刻 t での物体の速度と位置はそれぞれ

$$v(t) = gt, \quad x(t) = \frac{1}{2}gt^2 \tag{1.5.1}$$

となる（各自示してみよ）．

1.5.2　鉛直投げ上げ

鉛直上向きに x 軸を取り，物体を初速 v_0 で投げ上げる．物体の初期位置を $x = x_0$ とすると，時刻 t での物体の速度と位置はそれぞれ

$$v(t) = v_0 - gt, \quad x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{1.5.2}$$

となる（各自示してみよ）．

1.6　落体の運動（2 次元）

水平投射や斜方投射は，力がベクトル的であることから水平方向の運動と鉛直方向の運動に分解して考えることができる．以下，水平方向で物体が進む方向に x 軸，鉛直上向きに y 軸を取る．

1.6.1　水平投射

- x 軸方向には力が働かない $\Rightarrow$ 等速直線運動
- y 軸方向には重力のみ，y 軸方向には初速がゼロ $\Rightarrow$ 自由落下と物理的には同じ

1.6.2　斜方投射

- x 軸方向には力が働かない $\Rightarrow$ 等速直線運動
- y 軸方向には重力のみ，y 軸方向に何らかの初速で投げ上げられたのと同じ
  $\Rightarrow$ 鉛直投げ上げと物理的には同じ