第6章　ポテンシャルエネルギーと力学的エネルギー保存則

6.1　はじめに

仕事とエネルギーに関する要点をまとめる．

- 仕事 = それを与えられた物体がどれだけ外部に影響を及ぼせるかを表す．式では $W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}$
- 仕事をされた物体にはエネルギーが蓄えられる
- 力学で扱うエネルギーの種類
  - 運動エネルギー：$K = \frac{1}{2}mv^2$
  - ポテンシャルエネルギー（位置エネルギー）: $U(x)$
    （重力によるもの，ばねの復元力によるものなど）
  - 力学的エネルギー = 運動エネルギー + ポテンシャルエネルギー
- 物体に外部から仕事を与えると，物体の運動エネルギーが変化する：$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$
- ポテンシャルエネルギーは，保存力にさからってする仕事によって蓄えられる
- ポテンシャルエネルギーを微分 → 保存力（にマイナスをつけたもの）: $F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$
- 力学的エネルギー保存則は運動方程式を積分することで導かれる
- ポテンシャルの形を見れば物体の運動のおおまかな様子がわかる

6.2　ポテンシャルエネルギー（位置エネルギー）と力学的エネルギー保存則

6.2.1　保存力

物体に加えられる力が，物体の位置のみで決まる場合がよくある．そのような力を**保存力**とよぶ．

保存力の例

- 地表近くでの重力：大きさ mg （一定）
- 自然長から x だけ伸びた（または縮んだ）ばねの復元力 ：kx

- 質量 M の物体から r だけ離れた地点で質量 m の物体が受ける万有引力 : 大きさ $G\dfrac{Mm}{r^2}$
- 電気量 Q の物体から r だけ離れた地点で電気量 q の物体が受けるクーロン力 : 大きさ $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qQ}{r^2}$

保存力は位置のみの関数なので $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ と書ける．1 次元なら $F(x)$ とか $F(r)$ のようになる．

ところで，保存力でない力もいくらでもあるが，講義で出てきた速度に比例する抵抗力 $-kv$ はその一つである．実際この力は位置のみに依存せず，速度の関数になっている（$F(x)$ でなく，$F(v)$ となっている）．他にも，物体間に働く動摩擦力もその例である．これは相対速度に依存せず一定値を取るが，運動の向きに依存する性質を持っており，同じ一定値でも運動の向きには依存しない重力とは性質が異なる．また，ブランコが大きく振れるようにタイミングよく加える力（= 時間に依存する力）だとか，逆にブランコを止めるようにブレーキをかける力なども，明らかに位置のみに依存する力ではない．

こういった「非保存力」があるときは，次の節で述べる力学的エネルギー保存則は成立しない．摩擦があれば力学的エネルギーが熱に化けていって運動が止まってしまったり，外からエネルギーを加え続けて振動を増幅させたりしている状況でエネルギーが保存しないのは理解し易いと思う．

6.2.2　ポテンシャルエネルギー

物体に保存力が加えられているとすると，運動方程式は

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \tag{6.2.1}$$

となる．簡単のため 1 次元で考えるなら，

$$ma = F(x) \tag{6.2.2}$$

である．以下この場合について扱う．上の式の両辺に速度 v をかけると

$$m\frac{dv}{dt}v = F(x)v \tag{6.2.3}$$

となるが，運動エネルギーのところでやったように，左辺は

$$m\frac{dv}{dt}v = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \tag{6.2.4}$$

に等しい．そこでこの両辺を時間で積分してみると

$$\int m\frac{dv}{dt}vdt = \int F(x)vdt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int F(x)\frac{dx}{dt}dt \tag{6.2.5}$$

となるが，最後の式の右辺は合成関数の積分になっているので

$$\int F(x)\frac{dx}{dt}dt = \int F(x)dx \tag{6.2.6}$$

のように，保存力 $F(x)$ を x で積分したものになる．また左辺は積分を実行できて

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \frac{1}{2}mv^2 + C \tag{6.2.7}$$

となる．ここで C は積分定数である．まとめると

$$\frac{1}{2}mv^2 + C = \int F(x)dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 - \int F(x)dx = -C = \text{一定} \tag{6.2.8}$$

が得られる．ここで

$$U(x) = -\int F(x)dx \tag{6.2.9}$$

と書き，一定値 $-C$ を改めて適当な定数 E と書けば

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E \quad (\text{一定}) \tag{6.2.10}$$

となる．これが**力学的エネルギー保存則**であり，

$$U(x) = -\int F(x)dx \quad \Rightarrow \quad F(x) = -\frac{dU}{dx} \tag{6.2.11}$$

のことを**ポテンシャルエネルギー**または**位置エネルギー**と呼ぶ．名前の由来は，位置のみで決まるエネルギーであることと，運動エネルギーのように見た目から明らかなエネルギーではなく，「運動する能力として秘めているエネルギー」であることから来ている．

ところで $F(x) = -\dfrac{dU}{dx}$ を見ると，$\frac{dU}{dx}$ が負なら $F(x)$ は正になる．つまりポテンシャルエネルギーが減少するような方向に向かって，保存力は働く．保存力はポテンシャルエネルギーを減らすように働くと言い換えてもよい．例えば物体が地球に引かれて落下する現象を物体に働く重力で説明する代わりに，物体が持っているポテンシャルエネルギーが減少する方向へと変化していくと解釈することもできる．

6.2.3 力学的エネルギーが保存しないのはどんなときか？

力学的エネルギーが保存するのは，物体に働く力が保存力のみであるときに限ると述べた．ということは保存力以外の力が働く場合には力学的エネルギーは保存しないことになる．

前に述べた摩擦力や空気抵抗のように保存力でない力は無限にあるが，考えているシステムの外側から物体に加えられる力は保存力ではない．これは「外力」と呼ばれるが，あたかも「神の手」のようなものだと思えばいい．例えば「壁の一端にばねをくくりつけ，他端におもりをつける．それを水平な床の上で振動させる」と言われたら，登場人物は文中に出てきたばね・おもり・床・壁だけで，最初にばねを伸ばして振動のきっかけを作る人は外部の存在である．こういう外部の人間が加える力を外力という．力学的エネルギーが保存するのは，外力によって振動が始まって以降の話である.[1]

今度は，机の上に止まっている物体を押して加速させるときを考えよう．最初は止まっていたのだから運動エネルギーはゼロで，押されて速度を持つ運動エネルギーが増えたということは物体の持つ力学的エネルギーは明らかに増加している（今，机の上で考えているので位置エネルギーはゼロ．このため

[1]最初にまったく外力を与えなければ，おもりは止まったままなのでそもそも運動が始まらない．

「運動エネルギー = 力学的エネルギー」である）．このエネルギーの増加は物体を外から押した仕事によるものである．誰かが余分に何かをしたのだから，エネルギーが変化するのは当然だろう．

理解が難しいのは，負の仕事を加えるときかもしれない．なぜなら,「外から仕事をしたにも関わらず,物体の力学的エネルギーが増加しない」からである．

例えば，重い荷物をそっと床に置くときを考えよう．手を離してしまえば荷物はドスンと床に落ちてしまう．手で支えている力が弱くてもそっと置くことはできないので，音がしないようにそっと置くときには，荷物に働く重力とちょうど同じ（くらいの）力を上向きに加え，その力をキープしつつ下にゆっくり動かしているはずである．この場合，力は上向きに加えているけれども物体は下向きに動いている．力の向きと進行方向が逆なので，これは負の仕事である．$W = |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{r}|\cos\theta$ の式で言えば，力 $\boldsymbol{F}$ と変位 $\boldsymbol{r}$ が 180° 開いているから，

$$\cos 180^\circ = -1 \quad \Rightarrow \quad W = -|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{r}| < 0 \tag{6.2.12}$$

のように負の仕事だと言ってもよい．

この場合，物体の力学的エネルギーは最初高い位置にあったときよりも減少している.「荷物を床にそっと置く」ために手は疲れるにも関わらず，物体の力学的エネルギーは増えないのだ．これは「床にそっと置くために加えた力」が，重力という保存力と逆向きの力だったからである．

高さ h まで持ち上げてある質量 m の物体に力を加えながらソロソロとゆっくり地面に下ろしていくとするなら，重力加速度の大きさを g として物体には重力 mg が働くから，物体をゆっくり下すには上向きに mg を加えればよい．よって床に置くまでに物体に加える仕事は $W = -|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{r}| = -mgh$ という負の仕事になる．この仕事によって，最初に持っていた力学的エネルギー mgh がなくなってしまったわけである．

床に置いた荷物を持ち上げて，再び床に下ろすという操作でも同様に不思議な感じがする．一旦持ち上げてから下ろせば，明らかに手は疲れる．仕事をした自分はエネルギーを消費しているのに，結局のところ荷物は「床の上に置かれている」という最初の状態に戻ったのだから，力学的エネルギーは増えも減りもしていない．一連の操作によって疲れているのに，それが荷物が持つエネルギーに転化していないのだ．

力について順番に考えていけばこれは納得がいく．荷物の質量を m とすれば，荷物には重力 mg が働いている．そこで最初に荷物を持ち上げるとき，物体には最低でも大きさ mg の力を加えてなければならない．この力を加えて高さ h だけ持ち上げるとき，手がする仕事は $mg \times h$ より mgh である．この操作によって，荷物は最初床に置かれていたときよりも mgh だけ多く力学的エネルギーを持つことになる.[2]

ここでもし手を離せば，荷物に加わる力は重力のみとなる．荷物は落下を始め，床にドスンと落ちる

[2]このとき，力学的エネルギーは保存していないことに注意．最初は床の上に置かれていたので，床の高さをポテンシャルエネルギーの基準（つまり床の高さにあるときポテンシャルエネルギーはゼロだと決める）とすれば，速度も持っていないので力学的エネルギーはゼロだったものが，mgh だけ増えている．手からの力という非保存力が加わったので，力学的エネルギーは保存しないのである．

だろう．そのときは保存力である重力しか働いていないので，力学的エネルギーは保存し，落下直前の荷物の速度は $\sqrt{2gh}$ となるはずである．

今考えたいのは荷物から手を離さずに，ゆっくり荷物を下ろしてそっと床に置く場合である．このときは前に述べたように，重力と釣り合う大きさ mg の力を上向きに加えながら荷物を下げていくことになる．そっと床に置けたなら荷物の速度はゼロだったということだから，当初の状態に戻っており，荷物の力学的エネルギーもゼロに戻っている．これは，荷物を床に下ろすという操作がした仕事が $-mgh$ という負の仕事だったからである．負の仕事によって，持ち上げたことでせっかく蓄えた mgh が消費されて $mgh - mgh = 0$ となったのである．単なる徒労に終わったということだ．

このように，仕事を加えればいつでも力学的エネルギーが増えるとは限らないことに注意してほしい．負の仕事や，仕事ゼロということもあるのだ.[3] 第 1 章の仕事のところで書いたことの繰り返しになるが，こうなるのは力学における仕事とは

> 物体に力を加えて状態を変化させたことで，その物体が周囲の環境に影響を及ぼせるようになったかどうか

だからである.「自分としてはこれだけ頑張った」を見ているのではなく，その操作によって物体がどれだけエネルギーを蓄えたか，そしてそのエネルギーによって周囲の環境に影響を及ぼせるようになったかに注目しているのである．日常生活で使われている「仕事」という言葉を力学に借りてきたために「なんとなく直観と合わない」ことが起きるが，わからなくなったら力学で気にしている仕事とはどんなものだったか，定義に戻って確認してほしい．

6.2.4 ポテンシャルエネルギーの例

地表近くでの重力によるポテンシャルエネルギー

地面を座標原点とし，鉛直上向きに x 軸を張る．重力加速度の大きさを g とするとき，質量 m の物体に働く重力は $-mg$ となる（重力は座標軸と逆向きであることに注意）．この力は位置のみに依存するから（というか一定値なので）保存力の一種である．

この保存力によるポテンシャルエネルギーは，定義から

$$U(x) = -\int^{x} F(x')dx' = -\int^{x} (-mg)dx' = mgx + C \quad (C\text{ は積分定数}) \tag{6.2.13}$$

となる．ポテンシャルエネルギーの原点（つまり，どの位置でポテンシャルエネルギーをゼロとするか）は自由に決めてよい．なぜなら，エネルギーは絶対的な量ではなく，任意の二つの状態間の相対的なも

[3] 物理的なプロセスではないが，こういうことはしょっちゅうある．やるだけ無駄だった仕事（= 仕事ゼロ）や，むしろ邪魔にしかなっていない仕事（= 負の仕事）は至るところで見かける．宿題やレポートにしても，どうせなら正の仕事になるように心がけたいものだ．人のレポートを写すだけの「写経」も漢字練習くらいにはなるかもしれないから考えようによっては正の仕事だが，人間は自分に都合のよい言い訳をいくらでも思いつく極めて優秀な生物であることは忘れてはなるまい．

のだからである．そこで $x = 0$ をポテンシャルエネルギーの原点としてみる．つまり $x = 0$ で $U = 0$ となるように積分定数を調整すると

$$0 = U(x = 0) = mg \cdot 0 + C \tag{6.2.14}$$

より $C = 0$ であればよいことがわかる．こうして，座標原点を基準とした時のポテンシャルエネルギーは

$$U(x) = mgx \tag{6.2.15}$$

のように決まる．

ところで，この計算でもわかるように

ポテンシャルエネルギーとは，物体をある状態に持って行く時に保存力に逆らってする仕事

のことである．例えば，地面に置かれた物体が勝手に上昇を始めることはない．物体を上昇させたければ誰かが持ち上げるなりして，外力を加えなければだめである．このときに加えるべき最小の力は重力 mg である．この力でソロソロとゆっくり持ち上げてあげれば物体は上昇し，地面より高い位置に来る．そこから手を離せば物体は落下を始める．つまり運動を始める．物体が運動を始められるのは，重力に逆らう力を加えて物体を高い位置まで持って行ったからである．つまり，重力という保存力に逆らって仕事をしたことにより，物体に「運動できる能力・可能性」という形でエネルギーが蓄えられたのである．

この過程がポテンシャルエネルギーの定義式

$$U(x) = -\int F(x)dx = \int(-F(x))dx \tag{6.2.16}$$

に表されている．$-F(x)$ を積分しているが，このマイナスは「保存力 $F(x)$ と大きさが等しくて逆向きの力」を表し，積分が「その力での仕事」を表している．

注 1：

「物体を上昇させるのに必要な力は，重力 mg とちょうど同じではなく，わずかに大きくなければダメでなないか？」という意見もあるだろう．現実にはその通りで「動かし始める = 加速させる」であるから，重力よりもわずかに大きな力を加えなければ動き出すことはないのだが，ここで「力の大きさの最小値は mg」と言っているのは極限値の意味であり，現実にそうなるかどうかではなく,「持ち上げるのに必要な力の最小値は mg に漸近する」という意味だと解釈すべきものである．

なお，mg よりも大きな力で持ち上げれば物体はどんどん加速する．その場合はポテンシャルエネルギーだけでなく運動エネルギーも持ってしまう．今はポテンシャルエネルギーの分だけを純粋に取り出したいのでこのような「最低限の力」のみを考えている．こちらもあくまで極限的な操作であり，現実には「全く運動エネルギーを持たせずに物体を上昇させる」

ことはできない．明らかに矛盾してしまう．こうした極限値としてのみ存在する理想的な変化を「準静的過程」といい，熱力学では「思考実験」として重要な役割を果たす．

注 2：

ポテンシャルエネルギーの基準を決める際，上の例では不定積分しておいてから積分定数を決めるという順で行ったが，積分の下限を基準点にしておいて定積分すると自動的に決めることができる．実際，$x=0$ をポテンシャルの基準としたければ定積分の性質から

$$U(x) = -\int_0^x (-mg)dx = \left[mgx'\right]_0^x = mgx \tag{6.2.17}$$

のようになる．一般にポテンシャルエネルギーの基準を $x=x_0$ に取りたければ

$$U(x) = -\int_{x_0}^x F(x')dx' \tag{6.2.18}$$

でもってポテンシャルエネルギーを定義すればよい．この定義だと $U(x_0)=0$ になるのは明らかである．

ばねの復元力によるポテンシャルエネルギー

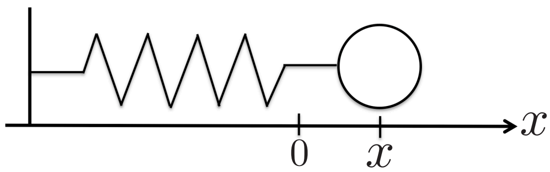

図 6.1: 単振動するおもり

ばね定数 k のばねに質量 m のおもりをつけて単振動させるケースをこれまで何度か扱ってきた．このとき自然長から x だけ伸びたばねがおもりに加える復元力もまた，保存力の一例である．これまで同様，図 6.1 のように x 軸を取ると，おもりが位置 x にあるときに受けている保存力は $F(x)=-kx$ であるから，この場合のポテンシャルエネルギーはやはり定義より

$$U(x) = -\int (-kx)dx = \int kxdx = \frac{1}{2}kx^2 + C \quad (C \text{ は積分定数}) \tag{6.2.19}$$

となる．ばねに伸びがないとき，ポテンシャルエネルギーをゼロとするのが自然なので（別にそうしなくてもよいが），積分定数 C は

$$0 = U(x=0) = \frac{1}{2}k\cdot 0 + C = C \tag{6.2.20}$$

より $C=0$ と決まる．よって，自然長のときを基準として，ばねのポテンシャルエネルギーは

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \tag{6.2.21}$$

となる．

万有引力によるポテンシャルエネルギー

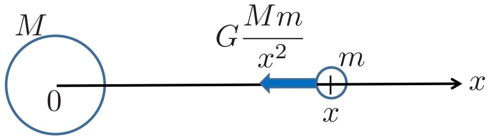

図 6.2: 原点に置かれた物体から，位置 x に置かれた物体に働く万有引力．

図 6.2 のように座標原点に質量 M の物体があり，そこから x だけ離れたところに質量 m の別の物体がある．質量 M の太陽が原点にいて，質量 m の地球がそこから距離 x だけ離れたところにいるところを想像すればよい．

このとき，地球が太陽から受ける万有引力は，万有引力定数を G として

$$\text{大きさ：}G\frac{Mm}{x^2},\quad \text{向き：}-x\text{ 方向} \tag{6.2.22}$$

であるため，地球が持つ，万有引力からのポテンシャルエネルギーは

$$U(x) = -\int\left(-G\frac{Mm}{x^2}\right)dx = \int G\frac{Mm}{x^2}dx = -G\frac{Mm}{x} + C \quad (C\text{ は積分定数}) \tag{6.2.23}$$

となる．

ポテンシャルエネルギーの基準点だが，万有引力の場合は $x=\infty$ にすることが多い．そうしておくと式が簡単だからである．実際，

$$0 = U(x=\infty) = -G\frac{Mm}{\infty} + C = 0 + C \tag{6.2.24}$$

なので，$x=\infty$ を基準点とするためには $C=0$ とすればよいことがわかる．こうして

$$U(x) = -G\frac{Mm}{x} \tag{6.2.25}$$

となる（図 6.3）．

もし，$x=x_0$ をポテンシャルの基準点としたければ

$$0 = U(x=x_0) = -G\frac{Mm}{x_0} + C \tag{6.2.26}$$

より $C = G\dfrac{Mm}{x_0}$ となって，

$$U(x) = -GMm\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right) \tag{6.2.27}$$

のように少々複雑になるので，特別な理由がなければ $x=\infty$ を基準としておいたほうが楽である．

注：

万有引力によるポテンシャルエネルギーは $U(x) = -G\dfrac{Mm}{x}$ という式からも，また図 6.3 からも明らかなように値が負である.「負のエネルギー」というと何となく不自然に思えるかもしれないが，これは

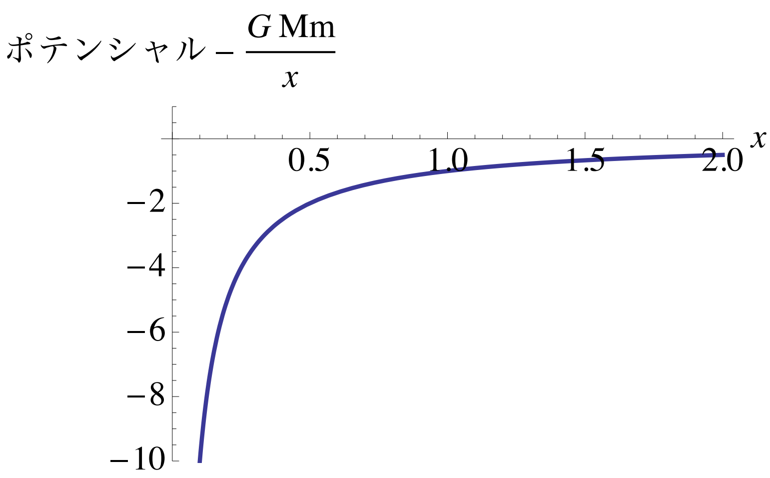

図 6.3: 万有引力によるポテンシャルエネルギー $U(x) = -G\dfrac{Mm}{x}$．簡単のため，$GMm = 1$ としてプロットした．

- エネルギーに絶対的な値はなく，２つの状態の相対的な差だけに意味がある
- エネルギーが最大になる $x = \infty$ を，エネルギーの基準点にとった

という２つの理由によるものである．

まず１つ目の理由は，万有引力のポテンシャルエネルギーに限った話ではない．例えば机の上に置かれたペンが持つ重力によるポテンシャルエネルギーは，地面の上に置いた場合よりは大きいだろうが，天井の高さまで持ち上げたときよりは小さいだろう．このため，地面を基準とすれば（つまり地面に置かれたときにポテンシャルエネルギーをゼロとすることに決めれば），机の上に置かれたペンのポテンシャルエネルギーは正になる．逆に，天井の高さまで持ち上げられた状態をポテンシャルエネルギーの基準にとれば，机の上に置かれたペンのポテンシャルエネルギーはそれよりは小さいから負ということになる．しかし,「机の上に置かれたペンのポテンシャルエネルギーは，地面に置いた場合よりは大きく，天井の高さまで持ち上げたときよりは小さい」という相対的な関係は変わらない．そして，この関係が変わらない以上，天井の高さまで持ち上げて手を離したときの方が，机の上からペンを落としてしまったときよりも，地面に衝突する直前でペンの速度は大きく，運動エネルギーも大きくなることがわかる．このようにポテンシャルエネルギーの差だけに物理的意味があるので，ポテンシャルエネルギーが負になること自体は奇妙なことではないのである．

万有引力のポテンシャルエネルギーの場合，式を単純にするために $x = \infty$ を基準にとった．この「２つの物体が無限の距離だけ離れた状態」というのは,「最もエネルギーが高い状態」である．地面より机の上，机の上より天井の高さの方がエネルギーが高いのは直観的に理解できると思うが，無限だけ離れた状態というのはその高さをずっと延ばしていって，宇宙の果てまで持っていった状態だからである．または，万有引力のために放っておいたら引き

つけ合う2つの物体を引き離して無限遠に置くという,「最もあり得ない，エネルギーの高い状態」に当たるのが $x=\infty$ だけ2つの物体が離れた状態である．そのような最もエネルギーの高い状態を $U=0$ というエネルギーの基準に取ってしまったので，それよりもエネルギーの低いその他の状態は，必然的に負のポテンシャルエネルギーを持つことになったのである．しかしこの場合も，ポテンシャルエネルギーで物理的に意味があるのは2つの状態の相対的な差のみなので，値が負でも特に問題はない．例えば，位置 A で $U=-5$J，位置 B で $U=-8$ J というようなことがあり得るが，-5 とか -8 という数字自体にはあまり意味がなく,「位置 A で持っているポテンシャルエネルギーは，無限遠にいるときに比べて 5 J 低い」とか,「位置 A と位置 B でのポテンシャルエネルギーの差は 3 J で，位置 A にいるときの方が高い．このため，位置 B にいる物体を位置 A まで持っていきたければ，最低でも 3 J のエネルギーを与えなければならない」といったことに物理的意味がある．

6.2.5　ポテンシャルエネルギーが経路によらないこと

きちんとした証明は次の節にある「線積分」を使わないことにはできないが，ポテンシャルエネルギーは経路によらず決まるという性質がある．例えば，地表近くでの重力によるポテンシャルエネルギーは高さのみで決まり，どういった道筋で，その高さまで持ち上げたかによらない．地面を基準とするとき，質量 m の物体が高さ h の地点で持つポテンシャルエネルギーは $U=mgh$ であるわけだが，最終的にこの地点に来るのであれば，直線的にそこまで来ようが，グニャグニャした道を通ってこようが，ものすごい高さまで一度行ってから下がって高さ h の地点に落ち着こうが，物体が持つポテンシャルエネルギーは $U=mgh$ である．これは重力によるポテンシャルエネルギーだけでなく，あらゆるポテンシャルエネルギーに共通の性質である．

6.2.6　参考：3次元でのポテンシャルエネルギーと力学的エネルギー保存則（講義では扱わない）

3次元での運動方程式は $m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}$ であるが，右辺の力を保存力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ とし，両辺で速度 $\boldsymbol{v}$ との内積を取って時間で積分すると

$$\int m\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}dt=\int \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}dt \qquad \Leftrightarrow \qquad \int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt=\int \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt \tag{6.2.28}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2}mv^2-\int \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}=\text{一定} \tag{6.2.29}$$

が1次元のときと同様に得られる．この一定値を E と書き，また

$$U(\boldsymbol{r})=-\int \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} \tag{6.2.30}$$

とすれば

$$\frac{1}{2}mv^2+U(\boldsymbol{r})=E \tag{6.2.31}$$

のように力学的エネルギー保存則が得られる．

$$U(\boldsymbol{r}) = -\int \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \left(-\frac{\partial U}{\partial x},\ -\frac{\partial U}{\partial y},\ -\frac{\partial U}{\partial z}\right) \tag{6.2.32}$$

で表されるスカラー関数 U が 3 次元でのポテンシャルエネルギーである．

ここで $\dfrac{\partial}{\partial x}$ などは偏微分といい,「他の変数は固定して x のみ微分する」という意味の記号である．また，スカラー関数に掛かる微分記号

$$\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{6.2.33}$$

のことを

$$\mathrm{grad} \quad \text{または}\ \boldsymbol{\nabla} \tag{6.2.34}$$

と書いて

$$\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}U, \quad \text{または}\ \boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}U \tag{6.2.35}$$

と表すことも多い．

6.3　ポテンシャルと運動の概形

ここからまた 1 次元に限って考える．運動方程式をきちんと解かなくても，ポテンシャルの形と最初の速度やエネルギーがわかれば，運動の大まかな様子をつかむことができる．なぜなら，保存力のみが働いている場合には力学的エネルギーが保存し，

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = E - U(x) \tag{6.3.1}$$

が成り立つが，$\dfrac{1}{2}mv^2$ はゼロまたは正なので

$$E - U(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad U(x) \leq E \tag{6.3.2}$$

を満たす範囲しか，物体は運動できないことがわかるからである．

物体が運動するとき，最初に持っていた力学的エネルギー E は運動エネルギーとポテンシャルエネルギーに割り振られる．その割合は時々刻々変化するが，合計値，すなわち力学的エネルギーが一定であることには変わりない．

物体の速度がゼロになって運動エネルギーがゼロのときは，$U(x) = E$，つまり力学的エネルギーが全部ポテンシャルエネルギーになっているはずである．逆に言うと，力学的エネルギー E とポテンシャルエネルギー $U(x)$ が等しくなったときに物体の速度はゼロになって，動きが一瞬止まる．振り子が最高点に来たときや，ばねに付けられたおもりが振動の端で一瞬止まるときである．その一瞬の後は，物体は逆側に戻っていき，運動が一瞬止まった場所を乗り越えてさらに進み始めるようなことはない．最初に持っていた力学的エネルギーよりも大きなエネルギーが必要になってしまうからである．ない袖は振れない以上，最初に持っていた力学的エネルギーでもって，どの範囲を動けるかが決まってしまうのである．

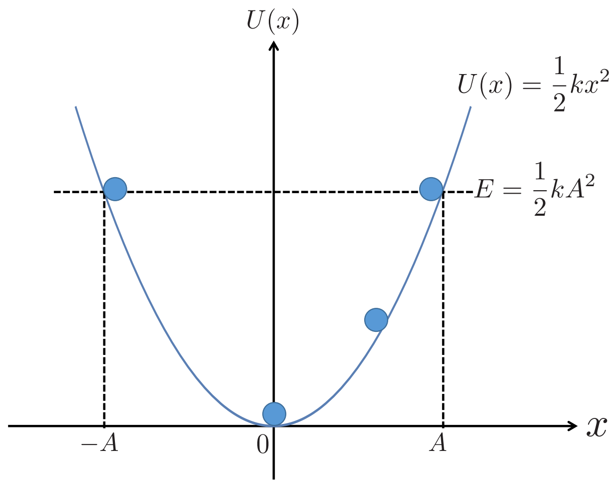

図 6.4: ばねの復元力によるポテンシャル．物体の動き方は，このポテンシャルの形をした入れ物の中を滑る物体の x 方向の動きと同じである．

例：単振動する物体のポテンシャルエネルギーと振動の範囲

これまでにも何度も扱ってきたが，摩擦のない水平面で単振動する質量 m の物体について考える．物体はばね定数 k のばねにつけられているとする．このときばねが自然長となるところを振動の原点として x 軸をとると

$$\text{物体の運動エネルギー} \quad : \quad K = \frac{1}{2}mv^2 \tag{6.3.3}$$

$$\text{物体のポテンシャルエネルギー} \quad : \quad U = \frac{1}{2}kx^2 \tag{6.3.4}$$

であり，力学的エネルギーはもちろん $E = K + U$ である．

最初，ばねを $x = A$ まで伸ばしてからそっと手を離したとすると，離した瞬間は速度がゼロなので，力学的エネルギーは

$$E = \frac{1}{2}m \cdot 0^2 + \frac{1}{2}kA^2 = E \quad \therefore E = \frac{1}{2}kA^2 \tag{6.3.5}$$

である．ばねの復元力によるポテンシャルを図示すれば図 6.4 のようになるが，物体の振動の様子はこのポテンシャルの形をした入れ物の中を滑る物体の動きを x 軸方向に射影したものと同じになる．物体が運動できる範囲は $U(x) \le E$ を満たすことから $-A \le x \le A$ になる．これは動き始めたときに持っていた力学的エネルギー $E = \frac{1}{2}kA^2$ を超えて運動することはできないからである．

位置 x において物体が受ける力はばねの復元力 $-kx$ であるが，これは保存力 F とポテンシャル U の関係 $F = -\frac{dU}{dx}$ を思い出すと，図 6.4 のグラフの接線の傾きになっていることにも注意してほしい．