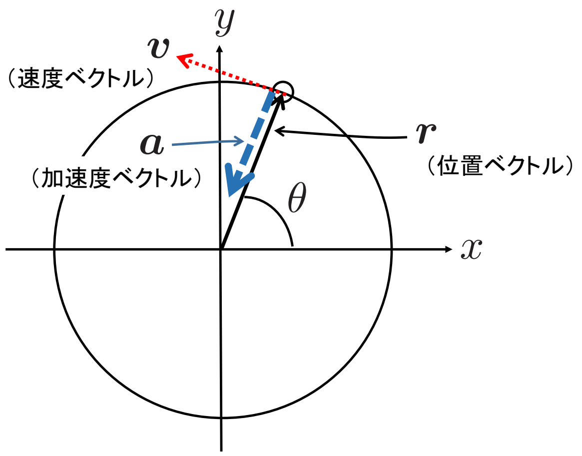
# 第3章　等速円運動と単振動

## 3.1　等速円運動




図のような半径 $r$，速さ $v$ が一定の運動を考える．重要な物理量として，角速度 $\omega$ がある．

### 3.1.1　角速度

- 角速度 ＝ 角度の時間変化率 ＝ $\dfrac{\text{角度の変化}}{\text{掛かった時間}}$

  数式での定義は，物体の位置ベクトルが $x$ 軸となす角を $\theta$ として[1]

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}. \tag{3.1.2}$$

- 速さ $v$，加速度の大きさ $a$，半径 $r$ とは，

$$v = r\omega, \quad a = r\omega^2 \tag{3.1.3}$$

  の関係にある．

- 周期 $T$ とは，角速度の定義から

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{3.1.4}$$

  の関係にある．

[1] 角速度が一定でない，より一般の円運動では

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \tag{3.1.1}$$

のように，微分で定義する．

### 3.1.2　等速円運動の位置ベクトル・速度ベクトル・加速度ベクトル

2 次元平面（$xy$ 平面）に限って考える．座標原点を中心とする角速度 $\omega$，半径 $r$ の等速円運動で，$t=0$ のときに位置 $(r,0)$ にいた場合，時刻 $t$ での物体の位置・速度・加速度はそれぞれ

$$\boldsymbol{r}(t) = (r\cos\omega t,\ r\sin\omega t), \tag{3.1.5}$$

$$\boldsymbol{v}(t) = (-r\omega\sin\omega t, r\omega\cos\omega t), \tag{3.1.6}$$

$$\boldsymbol{a}(t) = (-r\omega^2\cos\omega t, -r\omega^2\sin\omega t), \tag{3.1.7}$$

となる（各自示してみよ）．また，それぞれの方向について

- $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{r}\Rightarrow\boldsymbol{v}$ は円軌道に接する方向，
- $\boldsymbol{a}\propto-\boldsymbol{r}\Rightarrow\boldsymbol{a}$ は円の中心を向く方向，

である（図を描けば明らかだが，数式からも示すことができる）．

## 3.2　単振動

- 単振動 = 等速円運動の正射影
- 円運動の半径を $A$, 角速度を $\omega$, 初期位相を $\alpha$ として，時刻 $t$ での物体の状態は以下の通り：
  - 位置：$x(t)=A\sin(\omega t+\alpha)$
  - 速度：$v(t)=\dot{x}(t)=A\omega\cos(\omega t+\alpha)$
  - 加速度：$a(t)=\dot{v}(t)=\ddot{x}(t)=-A\omega^2\sin(\omega t+\alpha)$
- 加速度 $a(t)$ と位置 $x(t)$ との間に

$$a(t)=-\omega^2x(t) \tag{3.2.1}$$

という関係が成り立つ

$\Rightarrow$ <u>加速度が速度と位置を決める</u>ので，(3.2.1) と同じタイプの運動方程式，つまり

$$(\text{加速度})=(-1)\times\ (\text{正の数})\times\ (\text{位置})$$

で表される運動があれば，その運動は単振動だと言える．

## 3.3　単振動タイプの微分方程式の解き方

### 3.3.1　実一般解の求め方

前節では単振動の位置 $x(t)$ から単振動の微分方程式を作ったが，これは逆に言えば単振動タイプの微分方程式

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\omega^2x(t)=0 \tag{3.3.1}$$

の解が

$$x(t) = A\sin(\omega t + \alpha) \quad (A, \alpha \text{は任意の実数}) \tag{3.3.2}$$

となることを意味する．微分すれば速度も

$$v(t) = A\omega\cos(\omega t + \alpha) \tag{3.3.3}$$

と決まる．またこれを加法定理で展開すると

$$x(t) = A\cos\alpha\sin\omega t + A\sin\alpha\cos\omega t \tag{3.3.4}$$

となるから

$$C = A\cos\alpha, \quad D = A\sin\alpha \tag{3.3.5}$$

と書き直せば

$$x(t) = C\sin\omega t + D\cos\omega t \tag{3.3.6}$$

となる．$A, \alpha$ が実数なので $C, D$ ももちろん実数であるから (3.3.2) と (3.3.6) のことを**実一般解**という．$C, D$ を使うと速度は

$$x(t) = C\sin\omega t + D\cos\omega t \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = C\omega\cos\omega t - D\omega\sin\omega t \tag{3.3.7}$$

となることはすぐわかる．大学の力学の教科書には，$A\sin(\omega t + \alpha)$ という形で実一般解が書いてあることが多い．これは「等速円運動の正射影」という単振動の定義から導かれる形だからだが，初期条件に合うように積分定数を求めるときにはこの形は少し計算が複雑になる．

### 3.3.2　初期条件の使い方

実際の問題に運動方程式を適用する場合，初期条件（初期位置や初速度）に合うように積分定数を決める必要がある．実一般解で言うと $C, D$ や $A, \alpha$ などを初期条件に合うように決めるわけである．[2]

例えば初期条件として

$$\text{初期位置 } x(t=0) = x_0, \text{ 初速度 } v(t=0) = v_0$$

が与えられていた場合に，実一般解

$$x(t) = C\sin\omega t + D\cos\omega t \tag{3.3.8}$$

をこれに合うように調整してみる．まず $t = 0$ において $x = x_0$ でなければならないわけだから実一般解に $t = 0$ を代入して

$$x(t=0) = C\sin(\omega\cdot 0) + D\cos(\omega\cdot 0) = C\cdot 0 + D\cdot 1 = D = x_0 \tag{3.3.9}$$

[2] 単振動タイプの微分方程式が 2 階であることに対応して積分定数は $C, D$，もしくは $A, \alpha$ のように 2 つある．対する初期条件も初期位置と初速度のように 2 つあるから，条件を満足するように $C, D$ もしくは $A, \alpha$ を設定することは必ずできる．

より，$D = x_0$ でなければならないことがわかる．初速度については，まず位置の実一般解を微分して速度

$$v(t) = C\omega\cos\omega t - D\omega\sin\omega t \tag{3.3.10}$$

を求めておき，$t = 0$ をここへ代入すると

$$v(t=0) = C\omega\cos\omega\cdot 0 - D\omega\sin\omega\cdot 0 = C\omega\cdot 1 - D\omega\cdot 0 = C\omega = v_0 \tag{3.3.11}$$

なので $C = v_0/\omega$ だとわかる．よって初期条件を満たす解は

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t + x_0\cos\omega t,\quad v(t) = v_0\cos\omega t - x_0\ \omega\sin\omega t \tag{3.3.12}$$

と決まる.[3] 先にも述べたように，初期条件を定めるにはこの

$$x(t) = C\sin\omega t + D\cos\omega t \tag{3.3.13}$$

というタイプの実一般解を使うと計算し易いことが多い．しかしこのタイプはグラフを描きにくい．実際，グラフにするときは

$$x(t) = A\sin(\omega t + \alpha) \tag{3.3.14}$$

というタイプに書き直した方がよい（というかそうしないと描けない）．例えば (3.3.12) を書き直してみると

$$x(t) = \sqrt{\frac{v_0^2}{\omega^2} + x_0^2}\ \sin(\omega t + \alpha), \tag{3.3.15}$$

$$\left(\text{ただし}\alpha\text{は}\sin\alpha = \frac{x_0}{\sqrt{\frac{v_0^2}{\omega^2} + x_0^2}},\ \cos\alpha = \frac{\frac{v_0}{\omega}}{\sqrt{\frac{v_0^2}{\omega^2} + x_0^2}}\ \text{を満たす角}\right) \tag{3.3.16}$$

となる．これにより，この単振動の振幅が

$$\sqrt{\frac{v_0^2}{\omega^2} + x_0^2} \tag{3.3.17}$$

であり，

$$\sqrt{\frac{v_0^2}{\omega^2} + x_0^2}\ \sin\omega t \tag{3.3.18}$$

のグラフを左へ $\alpha$ だけずらしたグラフになることがわかる．

---

**例題 3.2.1：単振動タイプの微分方程式の解法**

以下の単振動タイプの微分方程式を解け.

[3] 講義では $v_0 = 0$ という例を紹介した.

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -2x$ （実一般解を求めよ）
(略解：$x(t) = A\sin(\sqrt{2}t + \alpha)$ または $x(t) = C\cos\sqrt{2}t + D\sin\sqrt{2}t$. ここで，$A, \alpha, C, D$ はいずれも任意の実数)

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -3x$ を，$t = 0$ で $x = -2$, $\dfrac{dx}{dt} = 2\sqrt{3}$ という初期条件の下で解き，$A\sin(\omega t + \alpha)$，$C\cos\omega t + D\sin\omega t$ の 2 つの形で表せ．
(略解：$x(t) = -2\cos\sqrt{3}t + 2\sin\sqrt{3}t, \quad x(t) = 2\sqrt{2}\sin\left(\sqrt{3}t - \frac{\pi}{4}\right)$)

---

## 3.4 単振動の例

### 3.4.1 ばねに付けられたおもりの振動

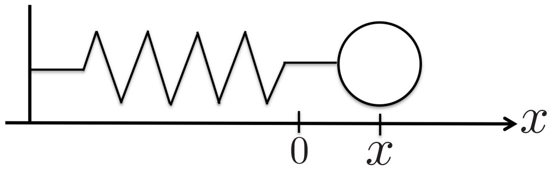



図 3.1: 単振動するおもり

図 6.1 のように，ばね定数 $k$ のばねを摩擦のない水平面に置いて一端を固定し，反対の端に質量 $m$ のおもりを付けるとき，ばねの自然長からの伸びが $x$ なら質点の運動方程式は

$$ma = -kx \quad \Longrightarrow \quad a = -\frac{k}{m}x \tag{3.4.1}$$

となる．これと $a = -\omega^2 x$ を見比べると，

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3.4.2}$$

と考えれば，おもりの運動方程式が単振動タイプであることがわかる．なお $\omega$ は等速円運動の**角速度**，単振動では**角振動数**なので，周期 $T$ とは

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Leftrightarrow \quad \omega T = 2\pi \tag{3.4.3}$$

という関係にある．周期 $T$ の逆数として定義される振動数

$$f = \frac{1}{T} \tag{3.4.4}$$

との間に成り立つ式

$$\omega = 2\pi f \tag{3.4.5}$$

も思い出しておくこと．

### 3.4.2　単振り子

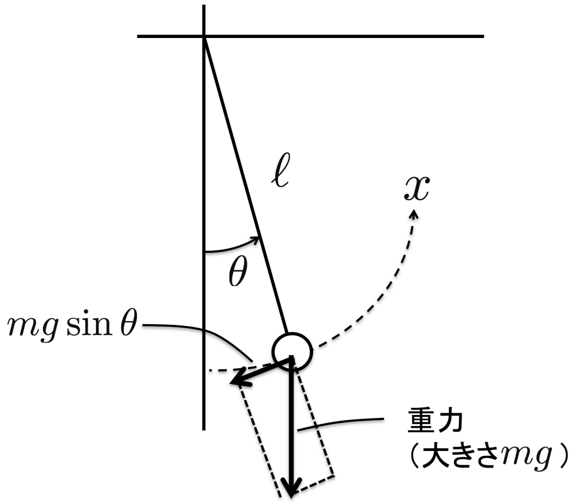



図 3.2: 単振り子

図 3.2 のように，長さ $\ell$ の軽くて伸び縮みしないひもの先に質量 $m$ のおもりをつけて，微小な振動を与える．おもりの軌道方向を $x$ 軸に取ると，鉛直方向とひものなす角 $\theta$ とは $x = \ell\theta$ の関係がある．この $\theta$ を用いると $x$ 方向（軌道の接線方向）に働く力は $-mg\sin\theta$ なので運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\ell\sin\theta \tag{3.4.6}$$

となる．ここへ $x = \ell\theta$ を代入し，さらに $\theta$ が十分小さいことを用いると

$$m\frac{d^2}{dt^2}(\ell\theta) = -mg\sin\theta \quad \Rightarrow \quad m\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} \approx -mg\theta \tag{3.4.7}$$

となり，これより近似的に

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\theta \tag{3.4.8}$$

を得るが，これは角振動数を $\sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$ の単振動タイプの運動方程式になっている．周期は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \tag{3.4.9}$$

で，この値はおもりの質量によらない．これを振り子の等時性という．

ここでは $\theta$ についての運動方程式を解いたが，$x = \ell\theta$ なので，$x$ についても単振動的な動き，すなわち sin や cos で表される運動をする．

### 3.4.3　電気振動

電気回路において，図 3.3 のようにな電気容量 $C$ [F] のコンデンサーとインダクタンス $L$ [H] のコイルのみを繋いだものを考える．あらかじめ充電しておいたコンデンサーを繋ぐと，蓄えられていた電荷

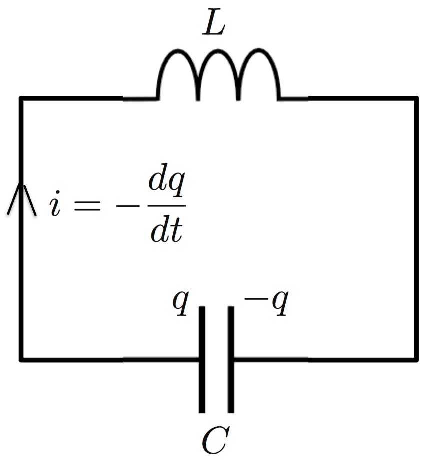



図 3.3: 振動回路

が放電され，コイルに電流が流れる．すると電磁誘導が起き，コイルに誘導起電力（逆起電力）が生じる．放電が進んで回路を流れる電流量が減少すると，その変化を妨げるように誘導起電力は誘導電流を流す．すなわち回路を電流が流れ続け，コンデンサーは最初に充電したのと逆符号の電荷で充電される．充電できる量は最初に充電した値で決まっているので（エネルギー保存則から当初に充電したときに蓄えられたエネルギーを超えて充電できることはない），充電が完了すると再び放電を始める．これを繰り返し，回路内を電流が振動的に流れ続けるのが電気振動である．[4]

この様子を数式で表す．時刻 $t$ においてコンデンサーに蓄えられている電気量を $q$ とすると，コンデンサーの極板間の電位は

$$V_C=\frac{q}{C} \tag{3.4.10}$$

である．また，時刻 $t$ で回路を流れている電流を $i$ とすると，コイルには

$$V_L=-L\frac{di}{dt} \tag{3.4.11}$$

だけの誘導起電力が発生している．回路内には抵抗がないので電圧降下はない．よってキルヒホッフの法則より，回路には

$$V_C+V_L=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{C}-L\frac{di}{dt}=0 \tag{3.4.12}$$

が成立する．ここで，回路に流れる電流は，コンデンサーに蓄えられていた電荷が流れ出したものであることに注意すると，

$$i=-\frac{dq}{dt} \tag{3.4.13}$$

が成り立つ．これを (3.4.12) へ代入すると

$$\frac{q}{C}-L\frac{d}{dt}\left(-\frac{dq}{dt}\right)=\frac{q}{C}+L\frac{d^2q}{dt^2}=0 \tag{3.4.14}$$

[4] 多少なりとも導線にも抵抗はあるので，永遠に電流が流れ続けることはない．

となるので，

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{1}{LC}q \tag{3.4.15}$$

であることがわかる．これは $\sqrt{\dfrac{1}{LC}}$ を角振動数とするような単振動を表す微分方程式になっている．これより，電気量 $q$ は周期

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \tag{3.4.16}$$

で単振動的に変化することがわかる．これを電気振動という．