第5章　仕事と運動エネルギー

5.1　はじめに

物理学には「物の理（ことわり）」を解き明かすという純粋科学的な側面だけでなく，実生活で役立つ「現世利益」的な側面もある．だからこそ物理学的手法は（好かれているかどうかは別として）理工系のあらゆる場面で顔を出す．

物理を「役立てる」という意味では，何と言っても物体が持つエネルギーや，そのエネルギーでできる仕事について計算できることが重要である．ここでは仕事，運動エネルギー，位置エネルギーおよび力学的エネルギーについて，微分積分を使って高校物理よりも一般的に定義し，理解を深める．

5.2　仕事

物体に力を加え，その方向に動かすことを「仕事をする」という．仕事をすることで物体にはエネルギーが蓄えられる．また，そのエネルギーを使って物体は仕事をする．つまり，力を加えながら何かを動かすことができる．

5.2.1　直線運動のとき

力と進む向きが一致しているとき

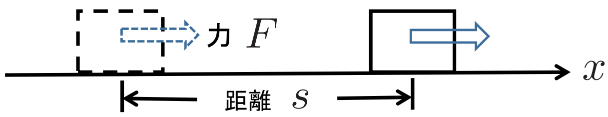

図 5.1: 力と運動の向きが一致している場合の仕事

直線的な運動する物体を考え，その運動方向に沿って x 軸を張る．図 5.1 のように物体に大きさ F [N] の力を加え，力の方向に距離 s [m] だけ動かす時，物体に加えた仕事は

$$W = Fs \ [\mathrm{J}] \tag{5.2.1}$$

であるという．

力と進む向きが一致していないとき

物体に加える力の方向が，物体の運動方向と異なる場合もある．例えば荷物に紐をつけてそれを肩にかけ，荷物を引きずる時は，力の方向は紐に沿う斜めの方向だが，物体は地面に平行に動く．

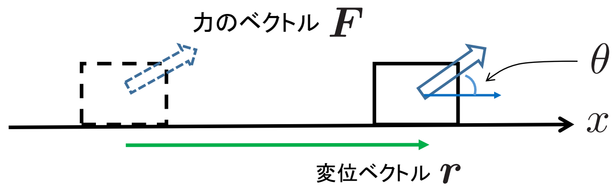

図 5.2: 力と運動の向きが角 θ をなす場合の仕事

このとき図 5.2 のように物体に加えた力を $\boldsymbol{F}$，物体の変位（ベクトル）を $\boldsymbol{r}$ とすると，動かした方向に加えられた力による仕事は

$$W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{r}|\cos\theta \tag{5.2.2}$$

のように内積で与えられる．動かした方向に加えた実質的な力が $|\boldsymbol{F}|\cos\theta$ だからである．ここで θ は力と変位がなす角である．$|\boldsymbol{F}|\cos\theta$ は力 $\boldsymbol{F}$ のうち変位 $\boldsymbol{r}$ に沿う成分（射影）だから，定義を

$$W = (|\boldsymbol{F}|\cos\theta)\times|\boldsymbol{r}| \tag{5.2.3}$$

と書き換えればわかるように，仕事とは

$$(\text{進ませるために実質的に役立っている力})\times(\text{進んだ距離})$$

のことである．図 5.2 の力のように進行方向に対して斜めに加えた力では，力全体が水平移動に使われているのではなく，水平方向成分である $|\boldsymbol{F}|\cos\theta$ のみが，その運動に役立っている．

一方，鉛直成分である $|\boldsymbol{F}|\sin\theta$ は，荷物を床から少し浮かせるためには役立っているが，水平移動には関係していない．物体の運動状態を変化させることに役立っていないわけで，そのことが仕事の定義 $W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{r}|\cos\theta$ にうまく取り入れられている．進行方向と直交する力は，仕事の定義式で $\theta = \frac{\pi}{2}$ にあたり，$\cos\frac{\pi}{2} = 0$ より $W = 0$，つまり何の仕事もしないことになるのである．

θ が $\frac{\pi}{2}$ を超えてくると，$\cos\theta$ は負になる．つまり，進行方向とは反対側に働く力による仕事は負ということだが，進行方向とは反対側に働く力は，物体にブレーキをかけて遅くさせ，物体が持つエネルギーを減少させる働きをするから，これは自然な定義である．

また，物体にどれだけ力を加えても，物体が少しも動かなければ物体に加えた仕事はゼロと考える．実際，定義に戻って考えれば変位 $|\boldsymbol{r}| = 0$ だから $W = 0$ であることはわかる．例えば，大きくて重たい岩を思い切り押しても，全然動かないことがあるだろう．このとき，押したら疲れるにも関わらず与えた仕事はゼロだということだ．なんだか不思議な気もするが，そもそも仕事とは何を見ているのかというと，

物体に力を加えて状態を変化させたことで，その物体が周囲の環境に影響を及ぼせるようになったかどうか

だからである．

岩の例では，どれだけ頑張って岩を押しても，結局岩が動かないのであればその岩が周りの環境に影響を及ぼすことはない.「思い切り押したらその岩に力が溜め込まれて，あるとき勝手に動きだす」ということはないわけだ．逆に軽い石であれば，簡単に動かすことができる．例えばそれを投げて何かを壊すことができるかもしれない．投げる際に手で石に力を加えながら動かし，速度を与えるという仕事をすることで，その石は何かを壊すという「影響」を外部に及ぼすことができるようになるのだ．

このように，力学で扱われている「仕事」は日常生活で使われる仕事とは別物である．あくまで「外部に影響を及ぼせるようなエネルギーを蓄えたかどうか」のみを力学では見ているので注意してほしい．

5.2.2 仕事と仕事率

物体の変位ベクトルを時間で微分したものが速度ベクトルなので，力 $\boldsymbol{F}$ が時間に依存しなければ

$$\frac{dW}{dt} = \boldsymbol{F} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} \tag{5.2.4}$$

となる．この $\dfrac{dW}{dt}$ を仕事率という．仕事率は単位時間当たりの仕事なので単位は [J/s] であるが，これを [W]（ワット）と表す．これからわかるように，電力 [W]（ワット）が仕事率と同じ次元，電力量が仕事と同じ次元を持つ．電力量の単位としては [Wh]（ワット時）がよく使われるが，これは電力に 1 時間をかけたものである．1 時間は 60 秒 × 60 分 = 3600 秒なので，

$$1\text{Wh} = 1\ \text{J/s} \times 3600\ \text{s} = 3600\ \text{J} = 3.6 \times 10^3\ \text{J} \tag{5.2.5}$$

である．また，

$$1\text{kWh}\ (\text{キロワット時}) = 1000\text{Wh} = 3.6 \times 10^6\ \text{J} \tag{5.2.6}$$

もよく使われる．

5.2.3 参考：曲線に沿う仕事と線積分（講義では扱わない）

一般には，物体の運動は直線になるとは限らない．曲線に沿う場合の仕事の計算には線積分を用いる．

今，図 5.3 のように物体の運動の軌跡を表す曲線が t を媒介変数として $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ で表されているとき，物体の無限小変位ベクトルは

$$d\boldsymbol{r} = (dx, dy, dz) = dx\boldsymbol{e}_x + dy\boldsymbol{e}_y + dz\boldsymbol{e}_z \tag{5.2.7}$$

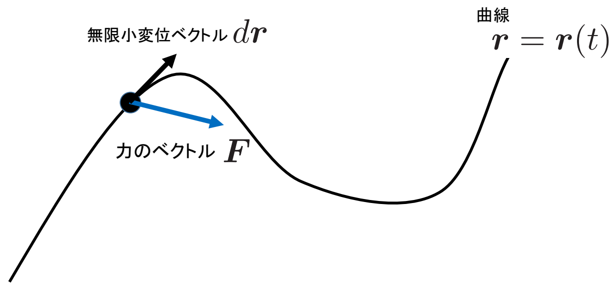

図 5.3: 曲線に沿う仕事と線積分

で与えられる．位置ベクトルが $\boldsymbol{r}(t)$ で表される点で物体に加えた力を $\boldsymbol{F}$ とすると，ごくごく小さい移動の間はこの力は一定であるとしてよいだろうから，無限小の仕事は

$$dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{5.2.8}$$

となるだろう．曲線に沿って点 P から点 Q まで移動したときには，この無限小の仕事を全て足し集めれば全仕事になる．具体的には

$$\begin{aligned} W &= \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}} dW = \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \\ &= \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \int \left(F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} \right) dt \end{aligned} \tag{5.2.9}$$

となる．ここで使った曲線に沿う積分を「線積分」という．高校で学習する積分は 1 変数関数 $f(x)$ に対するものなので積分経路は x 軸に沿うものしかない（上の式で，dx に関する積分しかない）．しかし物理量は位置座標 (x, y, z) のような，いくつかの変数に依存するのが一般的である．このため積分経路は直線になるとは限らず，空間中の曲線に沿う積分を計算する必要がある．線積分はそれにあたり，力学で使う場面はあまり多くないが，電磁気学では頻出の計算である．

5.3　仕事と運動エネルギー

5.3.1　仕事による運動エネルギーの変化

運動方程式 $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ を用いると，仕事と運動エネルギーの関係を導くことができる．運動方程式で加速度 $\boldsymbol{a}$ を $\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ と書くと

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{5.3.1}$$

となるが，この両辺と速度 $\boldsymbol{v}$ の内積を取ると

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} \tag{5.3.2}$$

を得る．この左辺を式変形すると

$$
\begin{aligned}
m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{v} &= m\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{1}{2}m\cdot 2\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right)=\frac{1}{2}m\cdot\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{v}\right) && (5.3.3)\\
&= \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})=\frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(v^2) && (5.3.4)\\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) && (5.3.5)
\end{aligned}
$$

となる．この時間微分されている量

$$\frac{1}{2}mv^2 \tag{5.3.6}$$

を**運動エネルギー**という．英語では kinetic energy なので $K=\dfrac{1}{2}mv^2$ のように K を用いて表すことが多い．

一方，式 (5.3.2) の右辺は仕事率に他ならないので

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}=\frac{dW}{dt} \tag{5.3.7}$$

と書ける．よって式 (5.3.2) は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\frac{dW}{dt} \tag{5.3.8}$$

であるから，両辺を積分すると積分定数を C として

$$\frac{1}{2}mv^2=W+C \tag{5.3.9}$$

を得る．

ここで，最初に物体の速度が v_0 だったとすると，仕事を加える前，つまり仕事が $W=0$ のときに運動エネルギーは $\dfrac{1}{2}mv^2$ だったはずなので，

$$\frac{1}{2}mv_0^2=0+C \quad \Rightarrow \quad C=\frac{1}{2}mv_0^2 \tag{5.3.10}$$

となる．よって

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv^2 &= W+\frac{1}{2}mv_0^2 && (5.3.11)\\
\Leftrightarrow \quad W &= \frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2 && (5.3.12)
\end{aligned}
$$

を得る．この式の右辺は，最初に持っていた運動エネルギー $\frac{1}{2}mv_0^2$ を仕事を加えられた後の運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ から引いたものだから，運動エネルギーの変化である．よって，

物体に加えた仕事の分だけ，物体の運動エネルギーは変化する

という関係が成り立つことがわかる．最初に物体が静止していた場合は $v_0=0$ なので，特に

$$W=\frac{1}{2}mv^2 \quad (v_0=0\text{ の場合}) \tag{5.3.13}$$

ということになる．

止まっている物体に力を加えて押せばその方向に加速し，運動エネルギーが増えるのは容易に想像がつく．減速させる方は少し想像しにくいかもしれないが，動いている物体に運動と逆向きの力を加えてブレーキをかければ減速する．式 (5.3.12) で $v < v_0$ のケースである．この場合，変位の方向と力の方向が反対だから負の仕事である．減速するから運動エネルギーも減少し，$\dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{1}{2}mv_0^2 < 0$ のように運動エネルギーの変化も負になる．この負の変化が負の仕事 $W < 0$ に対応している．

例：等加速度運動での運動エネルギーの変化と仕事

1 次元運動に限って考え，図 5.4 のように物体の運動方向に沿って x 軸を張る．一定の力を加えると，物体は等加速度運動をする．力の大きさを F とし，物体が時間 t の間に距離 s だけ移動し，速度は v_0 から v に加速したとする．

このとき，物体の加速度は

$$a = \frac{\text{速度の変化}}{\text{かかった時間}} = \frac{v - v_0}{t} \tag{5.3.14}$$

であり，物体に加えられた仕事は

$$W = Fs \tag{5.3.15}$$

である．また移動距離 s は等加速度運動の単元で求めた位置 x，速度 v を用いて

$$2as = v^2(t) - v_0^2 \tag{5.3.16}$$

である．これは等加速度運動における時刻 t の物体の位置を表す

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{5.3.17}$$

と速度の式

$$v(t) = v_0 + at \tag{5.3.18}$$

を連立させて t を消去し，$s = x(t) - x_0$ を使えば得られる式である（時刻 t での位置 $x(t)$ から最初の位置 x_0 を引いた $x(t) - x_0$ が移動距離 s であることに注意．ただし加速度が途中で変化して，行ったり来たりするようなシチュエーションでは単純な引き算では求まらない）．

さて運動方程式 $ma = F$ の両辺に s をかけると

$$mas = Fs \qquad \Rightarrow \qquad m \cdot \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = Fs \tag{5.3.19}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = Fs \tag{5.3.20}$$

となることがわかる．左辺は運動エネルギーの変化であり，右辺は物体に加えられた仕事である．確かに上で述べた関係が成り立っていることがわかる．

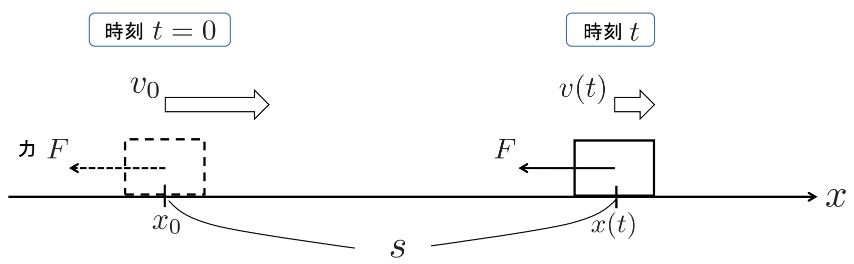

図 5.4: ブレーキが掛かって減速する物体